MATEMÁTICA

GABARITO OFICIAL DEFINITIVO

Questão 1

Item A

Sejam, **b** = preço do boné em reais
c = preço da camiseta em reais

Então o sistema de equações com os dados do problema são:

$$10\mathbf{b} + 20\mathbf{c} = 350$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = 20$$

Resolvendo o sistema por eliminação, multiplicamos a segunda equação por -10 e temos que :

$$\begin{array}{r} 10\mathbf{b} + 20\mathbf{c} = 350 \\ \underline{-10\mathbf{b} - 10\mathbf{c} = -200} \\ 10\mathbf{c} = 150 \\ \mathbf{c} = 15 \end{array}$$

Substituindo o valor de c na segunda equação temos que

$\mathbf{b} + 15 = 20$

$\mathbf{b} = 5$

Item B

A equação com os dados do problema é :

$30\mathbf{b} + \mathbf{xc} = \mathbf{y}$

Substituindo os valores de b e c temos que

$30(5) + \mathbf{x}(15) = \mathbf{y}$
$150 + 15\mathbf{x} = \mathbf{y}$

Então, colocando em evidência 15, segue que

$15\,(10 + \mathbf{x}) = \mathbf{y}$

Como **y** deve ser o menor quadrado perfeito, segue que
$10 + \mathbf{x} = 15$

Portanto, $\mathbf{x} = 5$

Questão 2

Resolução:

$$\begin{cases} x + y + z = 375 \quad (\text{I}) \\ y - x = \dfrac{1}{5}y \quad (\text{II}) \\ z - y = \dfrac{1}{5}y \quad (\text{III}) \end{cases}$$

Isolando x e z em (II) e (III), temos:

$$y - x = \frac{1}{5}y \qquad\qquad z - y = \frac{1}{5}y$$

$$5y - 5x = y \qquad\qquad 5z - 5y = y$$

$$x = \frac{4}{5}y \quad (\text{IV}) \qquad\qquad z = \frac{6}{5}y \quad (\text{V})$$

Substituindo (IV) e (V) na equação (I), obtém-se y:

$$x + y + z = 375 \Rightarrow \frac{4}{5}y + y + \frac{6}{5}y = 375 \Rightarrow 4y + 5y + 6y = 1875 \Rightarrow$$

$$15y = 1875 \Rightarrow y = \frac{1875}{15} \Rightarrow y = 125g.$$

Substituindo y = 125g em (IV) e (V), obtém-se x e z:

$$x = \frac{4}{5}y \Rightarrow x = \frac{4}{5}\cdot 125 \Rightarrow x = 100g \quad \text{e} \quad z = \frac{6}{5}y \Rightarrow z = \frac{6}{5}\cdot 125 \Rightarrow z = 150g$$

Logo, teremos a seguinte P.A. (100, 125, 150).

As quantidades, em miligramas dos nutrientes A, B e C a serem consumidas, por refeição, pelo patinador, são:

Nutriente A $\rightarrow 1\cdot x + 1\cdot y + 2\cdot z = 1\cdot 100 + 1\cdot 125 + 2\cdot 150 = 525\,mg$.

Nutriente B $\rightarrow 1\cdot x + 2\cdot y + 1\cdot z = 1\cdot 100 + 2\cdot 125 + 1\cdot 150 = 500\,mg$.

Nutriente C $\rightarrow 3\cdot x + 5\cdot y + 3\cdot z = 3\cdot 100 + 5\cdot 125 + 3\cdot 150 = 1375\,mg$.

Questão 3

Solução do item (A)

Seja $y = g(t) = -\frac{2}{5}t^2 + 20t$ a função horária que fornece o desempenho do atleta A no intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$ e sejam O(0,0) e P(t_1,g(t_1)) os pontos do gráfico dessa função correspondentes a $t = 0$ e $t = t_1$.

A reta r que passa por O e P tem coeficiente angular

$$m_1 = \frac{100}{10} = 10$$

e, então, sua equação é:

$$r: \quad y = y(t) = 10t.$$

A ordenada do ponto P fornece a igualdade

$$10t_1 = -\frac{2}{5}t_1^2 + 20t_1$$

$$\Rightarrow t_1\left(-\frac{2}{5}t_1 + 10\right) = 0$$

$\Rightarrow t_1 = 0 \; ou \; t_1 = 25.$

Logo, $t_1 = 25$ segundos e $g(t_1) = 250$ metros, ou seja, P(25,250).

O ponto Q(t_2,y_2) do gráfico da função horária que fornece o desempenho do atleta B no instante t_2 tem ordenada $y_2 = 800$ satisfazendo a equação

$800 = y_2 = f(t_2) = 700 \log_2\left(\sqrt[7]{t_2}\right) + \frac{1}{7}\log_2(t_2)^{100}$

$\Rightarrow 800 = \frac{1}{7} \times 700 \log_2(t_2) + 100 \times \frac{1}{7}\log_2(t_2)$

$\Rightarrow 800 = 100 \log_2(t_2) + \frac{100}{7}\log_2(t_2)$

$\Rightarrow 800 = \frac{800}{7}\log_2(t_2).$

Logo,

$\log_2(t_2) = 7 \Rightarrow t_2 = 2^7 = 128 \; segundos.$

Solução do item (B)

A função horária que fornece o desempenho do atleta B no intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$ é uma reta s de coeficiente angular

$m_2 = 4$, que passa pelo ponto P(25,250).

Logo, temos

$s: y - 250 = 4(t - 25)$

$\Rightarrow y = 4t + 150.$

Portanto, o atleta A percorreu

$4 \times 128 + 150 = 662\ metros.$

E, concluímos que o atleta B concluiu a corrida a frente de A

$800 - 662 = 138\ metros.$

Questão 4

A) Seja *M* o ponto médio do lado $\overline{AB}$. Então, $\overline{OM} = \sqrt{3}$ e $\overline{AB} = r$. Pelo Teorema de Pitágoras tem-se que $r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$ e daí,

$\frac{4r^2 - r^2}{4} = 3 \Rightarrow 3\,r^2 = 12 \;\Rightarrow\; r^2 = 4 \;\Rightarrow\; r = 2\ cm.$

Logo, a área do hexágono regular é igual a seis vezes a área do triângulo AOB, isto é,

$A_H = 6\,\frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow\; A_H = 6\sqrt{3}\ cm^2$.

A área do círculo é $A_C = \pi r^2 \Rightarrow A_C = 4\pi\ cm^2$.

Portanto, a área hachurada é $A_C - A_H = \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right)\ cm^2$.

B) Como $r = 2\ cm$, segue que as coordenadas do ponto B são $B(0{,}2)$.

Logo, o módulo de cada uma das raízes correspondente aos complexos z são todas iguais a 2, ou seja, $|z| = 2$.

Assim, $|w| = |z^6| = |z|^6 = 2^6 = 64\ cm$.