# Caderno de Questões

A Unicamp
comenta suas provas

99

# SEGUNDA FASE

14 de Janeiro de 1998

# Matemática

"A prova de Matemática do Vestibular Unicamp procura identificar nos candidatos um conhecimento crítico e integrado da matemática de primeiro e segundo graus." Para alcançar esse objetivo, a Banca tem procurado elaborar uma prova abrangente em termos de conteúdos programáticos, equilibrada quanto ao nível de dificuldade dos problemas, iniciando com questões muito simples e objetivas e terminando com problemas mais difíceis. Todas as questões, entretanto, podem ser totalmente resolvidas com base nos conteúdos que constam do "Programa do Vestibular" e que são aqueles usualmente ensinados no primeiro e segundo graus. Alguns desses tópicos merecem destaque, não por serem mais importantes que os demais, mas porque têm sido ensinados de forma inadequada: Gráficos de funções, Resolução de problemas, Combinatória e Probabilidade, Geometria no espaço, Números complexos, Desigualdades e Aproximações.

Convém destacar, desde logo, que o êxito na resolução das questões de matemática depende, essencialmente, da leitura cuidadosa de cada problema proposto; a elaboração de figuras e gráficos também é fortemente recomendada. Os cálculos devem ser feitos com cuidado, as respostas precisam ser claras e, quando for o caso, não esquecer de mencionar, corretamente, as unidades de medidas.

Como em vestibulares anteriores, a prova de Matemática da Unicamp 98 apresenta quatro questões iniciais muito simples que exigem apenas raciocínio e um conhecimento básico de matemática elementar. Mesmo assim, a questão 3, mostrou que a maioria dos candidatos tem dificuldades em conceitos elementares.

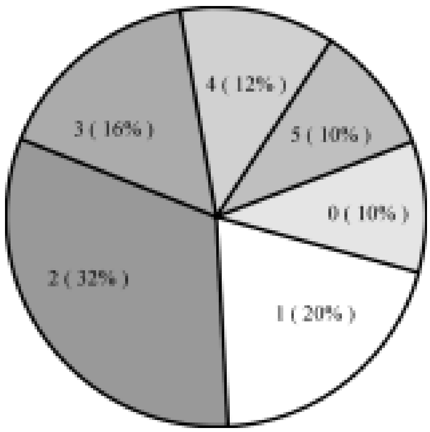
A questão 5 procura valorizar o ensino de *contagem* no primeiro e segundo graus, passando uma mensagem de importância deste tema. A partir deste ponto, as questões tornam-se progressivamente mais elaboradas; algumas exigem conhecimentos de conteúdos específicos, outras um domínio de técnicas algébricas e raciocínios cuidadosos.

## Questões

**Atenção: Escreva a resolução COMPLETA de cada questão nos espaços reservados para as mesmas.**

### Questão 1

O gráfico abaixo, em forma de pizza, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32.000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão.




Pergunta-se:

**a)** Quantos candidatos tiveram nota 3 ?
**b)** É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi $\leq 2$? Justifique sua resposta.

### Resposta Esperada

a) O gráfico mostra que 16% dos 32.000 candidatos tiveram nota 3. De modo que

$$16\% \text{ de } 32.000 = \frac{16}{100} \cdot 32.000 = 5.120$$

Resposta: 5.120 candidatos tiveram a nota 3. *(2 pontos)*

b) Para calcular a nota média ($M$) podemos supor que o número de candidatos é 100, logo

$$M = \frac{10x0 + 20x1 + 32x2 + 16x3 + 12x4 + 10x5}{100} = \frac{230}{100} = 2{,}3$$

Resposta: Não. A nota média na questão foi 2,3 portanto, foi > 2. *(3 pontos)*

**Comentários**

A observação, a análise e a conclusão a partir de uma tabela de dados são aptidões consideradas indispensáveis à integração do indivíduo na sociedade. O uso de porcentagens, médias e comparação completam os objetivos dessa questão.

A nota média nessa questão, na escala 0-5, foi de 3,07.

**Questão 2**

Dois estudantes, **A** e **B**, receberam Bolsas de Iniciação Científica de mesmo valor. No final do mês, o estudante **A** havia gasto 4/5 do total de sua Bolsa, o estudante **B** havia gasto 5/6 do total de sua Bolsa sendo que o estudante **A** ficou com R$8,00 a mais que o estudante **B**.

**a)** Qual era o valor da Bolsa?
**b)** Quantos reais economizou cada um dos estudantes, naquele mês?

**Resposta Esperada**

a) Se $x$ é o valor da Bolsa que cada um recebeu, então: O estudante **A** economizou $\frac{1}{5}x$ e **B** economizou $\frac{1}{6}x$ ; como **A** economizou R$8,00 a mais que **B**, tem-se:

$$\frac{1}{5}x = \frac{1}{6}x + 8$$

ou seja

$$\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}x = 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)x = 8$$

ou ainda

$$\frac{1}{30}x = 8 \Rightarrow x = 240$$

Resposta: O valor da Bolsa era de R$240,00. *(3 pontos)*

O estudante **A** economizou $\frac{1}{5}$ de R$240,00, ou seja, R$48,00.

O estudante **B** economizou $\frac{1}{6}$ de R$240,00, ou seja, R$40,00. *(2 pontos)*

**Comentários**

Esta questão procurou avaliar os conhecimentos dos candidatos nos seguintes aspectos: operações com números racionais (frações), leitura e interpretação de texto, equacionamento (linguagem algébrica).

Os candidatos tiveram dificuldade para obter a equação correta, sendo que muitos deles, por terem invertido os termos da equação, chegaram a um número negativo para o valor da Bolsa. A equação [incorreta]

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 8$$

apareceu com freqüência. Média nessa questão: 3,98.

**Questão 3**

O quadrilátero formado unindo-se os pontos médios dos lados de um quadrado é também um quadrado.

**a)** Faça uma figura e justifique a afirmação acima.

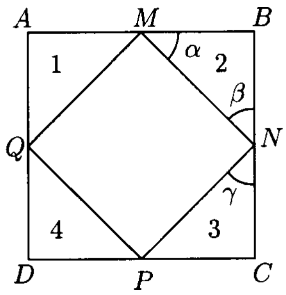
**b)** Supondo que a área do quadrado menor seja de 72 $cm^2$, calcule o comprimento do lado do quadrado maior.

**Resposta Esperada**

a) Para provar que MNPQ (ver figura) é um quadrado, vamos mostrar que os seus quatro lados têm o mesmo comprimento e os seus ângulos internos são retos.

Os triângulos 1, 2, 3 e 4 são retângulos, isósceles e congruentes [dois lados, que são os catetos, e os ângulos compreendidos entre eles, que são retos, iguais]. Logo, as hipotenusas – que são os lados de MNPQ – são iguais.

Os ângulos a, b, g ... medem, cada um deles p / 4 radianos. Ou seja, b + g = p / 2 de modo que $\hat{N} = \pi / 2$. Analogamente $\hat{M} = \hat{P} = \hat{Q} = \pi / 2$. *(3 pontos)*




b) Temos que área de MNPQ = 72 cm² = $\frac{1}{2}$ área de ABCD = $\frac{1}{2}$ $L^2$.

Logo: $L^2 = 144 \Rightarrow L = 12cm$

Resposta: O lado do quadrado maior mede 12 cm. *(2 pontos)*

**Comentários**

A caracterização precisa [definição] de figuras geométricas, especialmente dos polígonos regulares, é freqüentemente omitida do ensino médio. Muitos candidatos ignoram que um *quadrado é um quadrilátero plano que tem quatro lados de mesmo comprimento* e *quatro ângulos retos*, limitando-se a uma **ou** outra condição.

Esta questão envolveu conteúdos básicos de geometria, como: congruência de triângulos, teorema de Pitágoras e medidas. As seguintes figuras geométricas apareceram com freqüência, nas respostas a essa questão: trapézio, cubo, paralelepípedo, paralelogramo e retângulo, evidenciando que muitos candidatos ainda não sabem o que é um quadrado ou tiveram dificuldade na compreensão do texto.

**Questão 4**

O preço unitário de um produto é dado por:

$$p = \frac{k}{n} + 10, \qquad \text{para } n \geq 1$$

onde $k$ é uma constante e $n$ é o número de unidades adquiridas.

**a)** Encontre o valor da constante $k$, sabendo-se que quando foram adquiridas 10 unidades, o preço unitário foi de R$19,00.
**b)** Com R$590,00, quantas unidades do referido produto podem ser adquiridas?

**Resposta Esperada**

a) Sendo $p = \frac{k}{n} + 10$ e $p$ = 19 quando $n$ = 10, tem-se:

$$\frac{k}{10} + 10 = 19 \Rightarrow k = 90$$ *(2 pontos)*

Resposta: O valor da constante $k$ é 90. *(2 pontos)*

b) Se $p = \frac{90}{n} + 10$ é o preço unitário, o preço de $n$ unidades é

$$p \cdot n = \left(\frac{90}{n} + 10\right) n = 90 + 10n = 590 \Rightarrow n = 50$$

Resposta: Com R$590,00 podem ser adquiridas 50 unidades. *(3 pontos)*

**Comentários**

A função afim $y = ax + b$ é muito estudada no primeiro e segundo graus; seu gráfico é uma reta e seu uso na descrição de fenômenos lineares é bem conhecido.

Entretanto, outras funções simples e importantes, como a apresentada nessa questão, raramente são consideradas. Em muitas situações o preço unitário de um produto depende, ou seja, é função da quantidade adquirida ou produzida e, em geral, o preço *diminui* à medida que o número de unidades *aumenta*, tendendo a um valor limite à medida que o número de unidades cresce muito. Esta é, exatamente, a situação modelada pela função:

$$p(n) = \frac{k_1}{n} + k_2$$

onde $k_1$ e $k_2$ são constantes. Convém observar que em muitas situações concretas as *variáveis* são *discretas*, isto é, envolvem apenas números inteiros positivos. É instrutivo obter e analisar tais funções a partir de tabelas e vice-versa.

Nesta questão 4 ficou evidente que a noção de *função* não está sendo ensinada apropriadamente: ao resolver o item **b**, muitos candidatos *esqueceram* que o preço unitário $p$ é função de $n$ e tomaram $p$ = R$ 19,00; a partir daí dividiram R$590,00 por R$19,00 obtendo *aproximadamente* 31 unidades.

**Questão 5**

**a)** De quantas maneiras é possível distribuir 20 bolas iguais entre 3 crianças de modo que cada uma delas receba, pelo menos, 5 bolas?
**b)** Supondo que essa distribuição seja aleatória, qual a probabilidade de uma delas receber exatamente 9 bolas ?

**Resposta Esperada**

a) Se cada uma das três crianças deve receber pelo menos 5 bolas, o número máximo de bolas que uma delas pode receber é de 10 bolas. Sejam A, B e C os *nomes* das crianças. Temos então as seguintes possibilidades:

I) A criança **A** recebe 10 bolas, **B** e **C** recebem 5 bolas cada. Vamos indicar esta possibilidade com a *terna ordenada* (10, 5, 5). A partir desta terna básica temos, por permutação, duas outras ternas a saber: (5, 10, 5) [isto quer dizer que a criança **A** recebe 5 bolas, **B** recebe 10 bolas e **C** recebe 5 bolas – o que configura uma distribuição diferente da anterior] e (5, 5, 10) [**A** recebe 5, **B** recebe 5 e **C** 10 bolas]. Logo, neste primeiro caso, em que uma das crianças recebe 10 bolas, temos um *total de 3 maneiras* para a distribuição das 20 bolas.

II) A criança **A** recebe 9 bolas, **B** recebe 6 bolas e **C** recebe 5 bolas, ou seja, formamos a terna ordenada básica (9, 6, 5). A partir desta terna básica obtém-se, por *permutação* outras 5 possibilidades. Logo, neste caso em que uma das crianças recebe 9 bolas, temos 6 *maneiras* de distribuir as 20 bolas. (Este caso é particularmente importante para a resolução do item **b**, visto que ele contempla todas as possibilidades de uma das crianças receber, exatamente , 9 bolas).

III) A criança **A** recebe 8 bolas, **B** recebe 7 bolas e **C** recebe 5 bolas: (8, 7, 5) e suas permutações, que são em *número* de 6.

IV) A terna (8, 6, 6) dá origem a 3 *possibilidades*.

V) A terna (7, 7, 6) dá origem a mais 3 *possibilidades*.

De modo que os cinco casos enumerados, que esgotam todas as possibilidades, totalizam 21 maneiras. *(3 pontos)*

b) Como o 9 *comparece* em 6 das 21 possibilidades [conforme o caso II considerado], temos:

$$p = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

como sendo a probabilidade de uma das 3 crianças receber exatamente 9 bolas.*(2 pontos)*

**Comentários**

O candidato que, nesta questão, procurou usar fórmulas quase sempre errou. A análise caso a caso que, infelizmente, muitos fizeram – nem sempre considerando todos os casos – é sem dúvida o melhor caminho. A Banca de Matemática tem insistido há alguns anos com problemas simples de contagem e probabilidade; temos notado progresso no ensino desses conteúdos – um momento oportuno para evidenciar a importância do raciocínio e o cuidado com o uso de fórmulas decoradas.

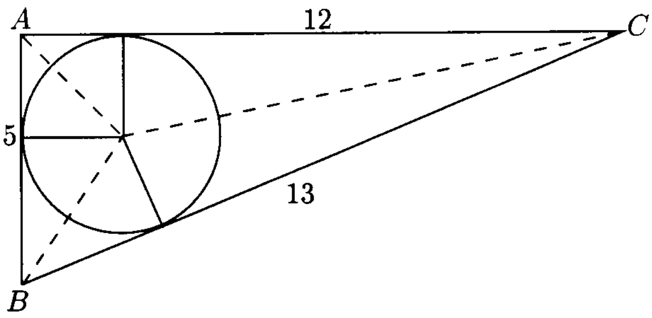
**Questão 6**

Os lados de um triângulo medem 5, 12 e 13 cm.
**a)** Calcule a área desse triângulo.
b) Encontre o raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

Resposta Esperada

a) Como $5^2 + 12^2 = 13^2$ o triângulo dado é retângulo, de modo que

$$A = \frac{bc}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30cm^2$$




*(2 pontos)*

b) Seja R o centro da circunferência inscrita e r o seu raio; a área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos ARC, BRC e ARB, cujas alturas são todas iguais a r. Assim sendo

$$\frac{5 \cdot r}{2} + \frac{12 \cdot r}{2} + \frac{13 \cdot r}{2} = 30 \Rightarrow 30 \cdot r + 60 \Rightarrow r + 2$$

Resposta: O raio da circunferência inscrita mede 2cm. *(3 pontos)*

**Comentários**

O candidato que conseguiu identificar o triângulo como sendo retângulo, e aqui aparece a recíproca do teorema de Pitágoras, resolveu facilmente o item **a**. O item **b** pode ser resolvida através da fórmula de Heron. Uma outra solução que apareceu com freqüência para o item **b** consiste simplesmente em aplicar a fórmula $A = p \, . \, r$ onde $p$ é o semi-perímetro e $r$ é o raio da circunferência inscrita. As dificuldades mais comuns foram: falta de unidade nas respostas, uso incorreto de fórmulas, mau entendimento do enunciado, a ausência de uma figura para conduzir o raciocínio e erros de cálculo.

**Questão 7**

Considere uma progressão geométrica de termos não-nulos, na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

**a)** Calcule os dois valores possíveis para a razão $q$ dessa progressão.

**b)** Supondo que o primeiro termo seja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q > 0$, calcule a soma dos três primeiros termos dessa progressão.

Resposta Esperada

a) Sejam $a_1$, $a_1 q$ e $a_1 q^2$ os três primeiros termos da progressão geométrica. Como cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores, podemos escrever:
$a_1 q^2 = a_1 + a_1 q$ ou seja, $a_1 (q^2 - q - 1) = 0$.

O enunciado afirma que os termos dessa progressão são não-nulos; em particular, $a_1 \neq 0$, de modo que a razão $q$ satisfaz à equação $q^2 - q - 1 = 0$. Resolvendo essa equação do segundo grau, obtêm-se as raízes:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

das quais apenas a primeira é positiva.

Resposta: Os dois valores possíveis para a razão são $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
*(2 pontos)*

b) Se $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ então

$$a_2 = a_1 q = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$$

e

$$a_3 = a_2 q = (-1) \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

de onde

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$$

Resposta: A soma dos três primeiros termos vale $-1-\sqrt{5}$. *(3 pontos)*

**Comentários**

Muitos candidatos que sabiam o que é uma progressão geométrica e que interpretaram o texto corretamente erraram ao calcular as raízes da equação $q^2 - q - 1 = 0$; outros tiveram dificuldade para identificar qual das raízes era positiva e, finalmente, diversos erraram em cálculos que envolviam operações com radicais.

**Questão 8**

Dada a função $f(x) = \log_{10} \frac{2x+4}{3x}$, encontre:

**a)** O valor de $x$ para o qual $f(x) = 1$.

**b)** Os valores de $x \in R$ para os quais $f(x)$ é um número real menor que 1.

**Resposta Esperada**

a) Temos, diretamente da definição de logaritmo

$$f(x) = \log_{10} \frac{2x+4}{3x} = 1 \Rightarrow \frac{2x+4}{3x} = 10 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$ *(2 pontos)*

b) Aqui também, a partir da definição temos

$$\log_{10} \frac{2x+4}{3x} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{2x+4}{3x} < 10$$

Se $x > 0$ então $2x + 4 > 0$ e $3x > 0$ de modo que

$$\frac{2x+4}{3x} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{2x+4}{3x} < 10 \Leftrightarrow x > \frac{1}{7}$$

Agora, se $x < 0$ então $3x < 0$ e $2x + 4 < 0$ para $x < -2$ , de modo que

$$\frac{2x+4}{3x} > 0 \quad \text{para } x < -2$$

Neste caso ($x < 0$) temos

$$\frac{2x+4}{3x} < 10 \Leftrightarrow 2x + 4 > 30x \Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$$

Podemos então concluir que para $x < 0$, $0 < \frac{2x+4}{3x} < 10$ se e somente se $x < -2$.

Resposta: Para todo $x \in$ **R**, $x < -2$ ou $x > \frac{1}{7}$, tem-se $f(x) < 1$. *(3 pontos)*

## Comentários

Esta questão pretendia identificar os candidatos que conhecem a definição da função logaritmo, *respeitam* o seu domínio e sabem trabalhar com desigualdades e inequações. O resultado (média geral de 1,48) evidencia que ainda há muito para ser trabalhado no ensino médio de primeiro e segundo graus, para que um resultado satisfatório possa ser obtido.

Quando se trata de resolver inequações, a maioria dos candidatos procura usar procedimentos decorados (tipo *método do varal*) sem entender o que está fazendo e freqüentemente chegam a resultados absurdos, que não são verificados e são apresentados como respostas. Neste sentido, convém enfatizar que analise (verificação) de respostas é uma atitude raríssima entre os candidatos, o que, certamente, reflete um grave defeito de formação.

## Questão 9

**a)** Encontre as constantes $a$, $b$, e $c$ de modo que o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos $(1{,}10)$, $(-2{,}-8)$ e $(3{,}12)$.

**b)** Faça o gráfico da função obtida no item **a**, destacando seus pontos principais.

## Resposta Esperada

a) O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1,10)$, $(-2,-8)$ e $(3,12)$, de modo que, quando $x = 1$, $y = 10$; quando $x = -2$, $y = -2$ e quando $x = 3$, $y = 12$.
Levando-se essas informações à expressão $y = ax^2 + bx + c$ obtém-se o sistema linear, não homogêneo:

$$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ 4a - 2b + c = -8 \\ 9a + 3b + c = 12 \end{cases}$$

*(3 pontos)*

cuja solução é $a = -1$, $b = 5$ e $c = 6$.

b) O gráfico da função $y = -x^2 + 5x + 6$ é uma parábola que corta o eixo $x$ nos pontos $x = -1$ e $x = 6$ (que são raízes da equação $x^2 - 5x - 6 = 0$, cujo vértice é o ponto $(2{,}5\,;\,12{,}25)$ e que corta o eixo $y$ no ponto $(0{,}6)$. *(2 pontos)*

## Comentários

Esta questão permite relacionar geometria com sistemas lineares, um aspecto pouco freqüente no ensino médio do segundo grau mas que consideramos muito importante.

A identificação do gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ como sendo uma parábola e a constatação de que três pontos distintos de uma parábola determinam essa parábola são também aspectos relevantes. A resolução do sistema linear fornecendo os valores de $a$, $b$ e $c$ foi apresentada pela maioria dos candidatos que acertaram, usando a regra de Cramer ou métodos de eliminação de variáveis; poucos usaram *escalonamento*, que é o método mais adequado. A presença das letras $a$, $b$ e $c$ representando incógnitas pode ter assustado os candidatos desavisados.

## Questão 10

**a)** Encontre todos os valores reais de $x$ para os quais $-1 \le \frac{x^2+4}{4x} \le 1$.

**b)** Encontre todos os valores reais de $x$ e $y$ satisfazendo $x^2 + 4x\cos y + 4 = 0$.

## Resposta Esperada

a) Vamos considerar, inicialmente, $x > 0$ de modo que $4x > 0$.
Neste caso

$$-1 \le \frac{x^2+4}{4x} \le 1 \Leftrightarrow -4x \le x^2 + 4 \le 4x \Leftrightarrow 0 \le (x+2)^2 \le 8x$$

Como $(x+2)^2 \ge 0$ para todo $x \in$ **R**, basta encontrar os valores de $x \in$ **R**, $x > 0$, para os quais $(x+2)^2 \le 8x$, ou seja, $x^2 - 4x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 0$ e isto só ocorre para $x = 2$, visto que para $x \neq 2$ temos $(x-2)^2 > 0$.

Então, o único valor real positivo de x para o qual $-1 \le \frac{x^2+4}{4x} \le 1$ é $x = 2$.

Para $x < 0$, a desigualdade inicial é equivalente a $4x \le x^2 + 4 \le -4x \Leftrightarrow 8x \le x^2 + 4x + 4 \le 0$. A inequação $x^2 + 4x + 4 \ge 8x$, ou seja, $x^2 - 4x + 4 \ge 0$ ou ainda $(x-2)^2 \ge 0$ é satisfeita para todo $x \in$ **R**, de modo que é suficiente considerar $x^2 + 4x + 4 \le 0$ ou $(x+2)^2 \le 0$, a qual somente é valida para $x = -2$.

Conclusão: Os únicos valores de $x \in$ **R** para os quais $-1 \le \frac{x^2+4}{4x} \le 1$ são $x = 2$ e $x = -2$.
*(2 pontos)*

b) Podemos supor $x \neq 0$ pois a equação $x^2 + 4x\cos y + 4 = 0$ não é satisfeita para $x = 0$. Sendo $x \neq 0$

$$x^2 + 4x\cos y + 4 = 0 \Leftrightarrow \cos y = -\frac{x^2+4}{4x}$$

Para todo $y \in$ **R**, $-1 \leq \cos y \leq 1$ de modo que

$$-1 \leq -\frac{x^2+4}{4x} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x^2+4}{4x} \leq 1$$

Pelo resultado obtido no item **a**, podemos concluir que $x = \pm 2$

Para $x = 2$, $\cos y = \frac{x^2+4}{4x} = -1 \Leftrightarrow y = (2k+1)\pi, k \in Z$ e

Para $x = -2$, $\cos y = 1 \Leftrightarrow y = 2k\pi, k \in Z$.

Resposta: As soluções da equação $x^2 + 4x\cos y + 4 = 0$ são todos os pares ordenados $(2, (2k+1)\pi)$ e $(-2, 2k\pi)$ com $k \in Z$. *(3 pontos)*

## Comentários

Muitos candidatos procuraram resolver o item **b** independentemente do item **a** – provavelmente porque não conseguiam relacioná-los.

A solução do item **b** sem usar o item **a** considera a equação $x^2 + 4x\cos y + 4 = 0$ como equação do segundo grau em $x$, cujos coeficientes são $a = 1$, $b = 4\cos y$ e $c = 4$ e trata de buscar raízes reais dessa equação. Para isso, o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 16\cos^2 y - 16 \geq 0 \Leftrightarrow 16\cos^2 y \geq 16 \Leftrightarrow \cos^2 \geq 1$ e isto ocorre se, e somente se, $\cos y = \pm 1$.

Para $\cos y = 1$ e, portanto, $y = 2k\pi$, $k \in Z$ a equação inicial se reduz a $x^2 + 4x + 4 = 0$ que somente é satisfeita para $x = -2$. Para $\cos y = -1$ e, portanto, $y = (2k+1)\pi$, $k \in Z$ a equação $x^2 - 4x + 4 = 0$ tem como única raiz $x = 2$.

Esta questão foi considerada pela Banca Corretora não somente difícil de ser entendida e/ou resolvida pelos candidatos – pois exigia uma análise sutil de desigualdades – mas também difícil de ser corrigida em virtude das múltiplas alternativas de solução.

O resultado (média 0,20) mostra que o estudo de inequações e desigualdades deve ser reforçado no primeiro e segundo graus, enfatizando conceitos e raciocínios e deixando em segundo plano artifícios, regras particulares e esquemas que não são entendidos pelos alunos.

## Questão 11

Se $z = x + iy$ é um número complexo, o número real $x$ é chamado *parte real de z* e é indicado por $\operatorname{Re}(z)$, ou seja, $\operatorname{Re}(x+iy) = x$.

**a)** Mostre que o conjunto dos pontos $(x, y)$ que satisfazem à equação $\operatorname{Re}\left(\frac{z+2i}{z-2}\right) = \frac{1}{2}$, ao qual se acrescenta o ponto $(2,0)$, é uma circunferência.

**b)** Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(-2,0)$ e é tangente àquela circunferência.

## Resposta Esperada

Vamos encontrar os pares $(x, y)$ para os quais os números complexos $z = x + iy$ satisfazem à equação $\operatorname{Re}\left(\frac{z+2i}{z-2}\right) = \frac{1}{2}$.

Se $z = x + iy$ então $z + 2i = x + (y+2)i$ e $z - 2 = x - 2 + iy$; para $z \neq (2, 0)$ temos

$$\frac{x+(y+2)i}{x-2+iy} = \frac{[x+(y+2)i]\ [x-2-iy]}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x(x-2)+y(y+2)+[(x-2)(y+2)-xy]\ i}{(x-2)^2+y^2}$$

Como o denominador é um número real, chegamos à equação

$$\frac{x^2-2x+y^2+2y}{(x-2)^2+y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2+4y+4 = 8$$

ou seja

$$x^2 + (y+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

para $(x, y) \neq (2, 0)$. Como o ponto $(2, 0)$ satisfaz esta mesma equação, o conjunto dos pontos que satisfazem à equação $\mathrm{Re}\left(\frac{z+2i}{z-2}\right)=\frac{1}{2}$ ao qual se acrescenta o ponto (2, 0) é o conjunto

$$C=\left\{ (x, y)\in \mathbf{R}^2 : x^2+(y+2)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \right\}$$

que é uma circunferência no plano $xy$, de centro $\mathrm{A}(0,-2)$ e raio $2\sqrt{2}$. *(3 pontos)*

a) O ponto $\mathrm{P}(-2,0) \in C$ e a reta tangente a $C$ no ponto P é perpendicular ao raio $\overline{PA}$, cuja inclinação é $\frac{-2-0}{0-(-2)}=-1$. Assim, a equação da reta tangente é

$$y-0=1\cdot(x+2) \Leftrightarrow y=x+2$$

*(2 pontos)*

**Comentários**

Esta questão procurou avaliar os conhecimentos dos candidatos na parte básica de números complexos e geometria analítica, além de habilidades com expressões algébricas. Como era esperado pela Banca, esta foi a questão mais difícil da prova – a média geral foi de 0,11 (na escala 0-5) e apenas 130 candidatos (1%) tiveram nota máxima nessa questão.

**Questão 12**

**a)** Qual é o valor $\lambda$ de na equação: $z^3-5z^2+8z-\lambda=0$ de modo que $z=3$ seja uma raiz dessa equação?
**b)** Para esse valor de $\lambda$, ache as três raízes $z_1, z_2, z_3$ dessa equação.
**c)** Ache o volume do sólido obtido quando a região triangular cujos vértices são os pontos $z_1, z_2, z_3$ gira em torno da reta de equação $x=1$.

**Resposta Esperada**

a) Para que $z = 3$ seja uma raiz do polinômio

$$p(z)=z^3-5z^2+8z-\lambda=0$$

devemos ter

$$p(3)=27-45+24-\lambda \Leftrightarrow \lambda=6$$

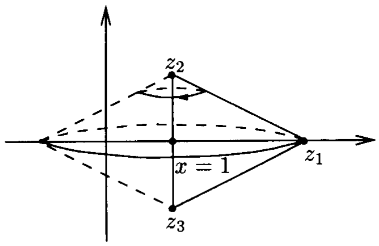
*(1 ponto)*

b) Para $\lambda = 6$, $p(z)$ é divisível por $z-3$ e

$$z^3-5z^2+8z-6=\left(z^2-2z+2\right)\ (z-3)$$

de modo que as outras duas raízes de $p(z)$ são raízes de $q(z) = z^2 - 2z + 2$, que é um trinômio do segundo grau. Resolvendo, pela fórmula de Báskara a equação $z^2 - 2z + 2 = 0$ obtém-se: $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$.
Assim as raízes de $z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0$ são:

$z_1 = 3$ $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 1 - i$




*(2 pontos)*

c) Quando a região triangular cujos vértices são $z_1$, $z_2$ e $z_3$ gira em torno da reta $x = 1$ o sólido obtido é uma reunião de dois cones, ambos com alturas iguais a 1 e raio das bases igual a 2. De modo que:

$$V=2\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h=2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 1=\frac{8\pi}{3}\,u.v.$$

*(2 pontos)*

**Comentários**

O estudo de polinômios é, quase sempre, descuidado no ensino médio do segundo grau – especialmente por envolver conhecimentos básicos de números complexos. Nesta questão a Banca Elaboradora procurou relacionar esses assuntos (números complexos e polinômios) com geometria espacial. A resolução do item **c** depende do conhecimento da fórmula que dá o volume de um cone.

A grande maioria dos candidatos acertou o item **a**, ao qual foi atribuído 1 ponto, com isso a nota média da questão foi superior à media da questão 11.