Caderno de Questões 99

A Unicamp comenta suas provas

UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES

As questões da 2ª Fase apresentam dificuldade crescente e procuram avaliar os conteúdos usualmente presentes no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

São propostos problemas que exigem compreensão de textos, análise de dados e gráficos, operações algébricas e geometria plana e espacial.

Questão 1

A troposfera, que é a primeira camada da atmosfera, estende-se do nível do mar até a altitude de 40.000 pés; nela, a temperatura diminui 2 °C a cada aumento de 1.000 pés na altitude. Suponha que em um ponto A, situado ao nível do mar, a temperatura seja de 20 °C. Pergunta-se:

a) Em que altitude, acima do ponto A, a temperatura é de 0 °C?

b) Qual é a temperatura a 35.000 pés acima do mesmo ponto A?

Resposta esperada

a) No ponto A a temperatura é de 20 °C; como a cada 1.000 pés a temperatura diminui 2 °C, em 10.000 pés a temperatura diminui 20 °C; logo, na altitude de 10.000 pés a temperatura é de 0 °C. **(2 pontos)**

b) Em 35.000 pés a temperatura diminui 70 °C; assim, a temperatura nessa altitude é de:
$20° - 70° = -50$ °C **(3 pontos)**

Comentários

Questão elementar, que exige apenas uma leitura cuidadosa.

Questão 2

Uma pessoa investiu R$ 3.000,00 em ações. No primeiro mês ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.

a) Com quantos reais ela ficou após os dois meses?

b) Qual foi seu prejuízo após os dois meses, em porcentagem, sobre o valor do investimento inicial?

Resposta esperada

a) No primeiro mês ela perdeu 40% do total investido, ou seja, 40% de 3.000,00 = 1.200,00.
No segundo mês ela recuperou 30% de 1.200,00 ou seja, recuperou 360,00. Logo, o que restou do investimento:
3.000,00 – 1.200,00 + 360,00 = 2.160,00 **(2 pontos)**

b) O prejuízo após dois meses foi de: 3.000,00 – 2.160 = 840,00.
Em porcentagem sobre o valor inicial:
$\frac{840}{3000} = \frac{28}{100} \to 28\%$ **(3 pontos)**

Comentários

Problema típico sobre “lucros e perdas”, enfatizando o uso de porcentagens.

Questão 3

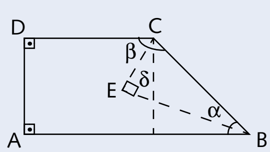
Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo α e um ângulo obtuso β. Suponha que, em um tal trapézio, a medida de β seja igual a cinco vezes a medida de α.

a) Calcule a medida de α, em graus.

b) Mostre que o ângulo formado pelas bissetrizes de α e β é reto.

Resposta esperada

a) Considere a figura abaixo:



A soma dos ângulos internos em um quadrilátero é igual a 360°, isto é:

$$90 + \alpha + \beta + 90 = 360 \Rightarrow \alpha + \beta = 180$$

Da relação $\beta = 5\alpha$ obtemos, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180 \\ \beta = 5\alpha \end{cases}$$

A solução $\alpha = 30°$ e $\beta = 150°$ logo a resposta é: $\alpha = 30°$ **(2 pontos)**

b) Considere, agora, o triângulo de lados $\overline{CB}$, $\overline{CE}$ e $\overline{EB}$ onde E é o ponto de encontro das bissetrizes de $\hat{C}$ e $\hat{B}$. A soma dos ângulos internos do triângulo é 180°, logo

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \hat{E} = 180$$

Do item anterior temos que $\alpha + \beta = 180$ de onde $\hat{E} = 90°$, logo a resposta é: $\hat{E} = 90°$, ou seja, o ângulo formado pelas bissetrizes é reto. **(3 pontos)**

Comentários

Esta questão avalia conhecimentos básicos de geometria plana.

Questão 4

Em uma festa para calouros estão presentes 250 calouros e 350 calouras. Para dançar, cada calouro escolhe uma caloura ao acaso formando um par. Pergunta-se:

a) Quantos pares podem ser formados?

b) Qual a probabilidade de que uma determinada caloura <u>não esteja</u> dançando no momento em que todos os 250 calouros estão dançando?

Resposta esperada

a) Se cada um dos 250 calouros pode dançar com qualquer uma das 350 calouras, temos 250 x 350 = 87.500 pares formados (Princípio Fundamental da Contagem). **(2 pontos)**

b) Para a probabilidade de uma caloura **não** estar dançando temos: 350 – 250 = 100 calouras que não estão dançando.

Logo: $\frac{100}{350} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} \to 28{,}5\%$, aproximadamente. **(3 pontos)**

Comentários

Muitos candidatos desconhecem o "princípio multiplicativo": se o conjunto ***A*** possui ***n*** elementos e o conjunto ***B*** possui ***m*** elementos, então o conjunto ***A*x*B*** possui ***n.m*** elementos. Ou seja, se o primeiro elemento de um par pode ser qualquer um de ***n*** elementos e o segundo elemento pode ser qualquer um de ***m*** elementos, então o número total de pares é **n.m**.

Questão 5

Uma reta intersecciona nos pontos A (3, 4) e B (– 4, 3) uma circunferência centrada na origem.

a) Qual é o raio dessa circunferência?

b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos A e B e seus simétricos em relação à origem.

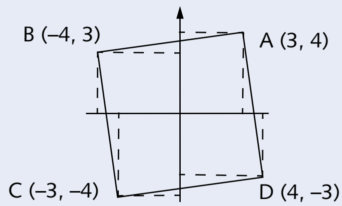
Resposta esperada 1

a) O ponto A (3, 4) pertence à circunferência em questão, cujo centro é o ponto O (0,0). Para encontrar o raio dessa circunferência basta calcular a distância.

$$d(A, O) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$ **(2 pontos)**

b) O simétrico do ponto (x, y), em relação à origem, é o ponto (–x, –y). Assim, o simétrico do ponto A (3, 4) é o ponto C (–3, –4) e o simétrico do ponto B (–4, 3) é o ponto D (4, –3). A figura a seguir é útil.

matemática



Para calcular a área S do quadrilátero $ABCD$, podemos dividir o referido quadrilátero em dois triângulos: ABD e CBD, cujas áreas podem ser calculadas aplicando-se a fórmula usual em geometria analítica, isto é:

$$S = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 50 \text{ u.a.}$$

(3 pontos)

Resposta esperada 2

b) $d(A, B) = \sqrt{(3+4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{50}$

$d(A, D) = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{50}$

Como os ângulos do quadrilátero ABCD são retos [porque?], tal quadrilátero é um quadrado.

Área do triângulo $ABD = \frac{1}{2}\sqrt{50}\sqrt{50} = 25$ *u.a.*

Área do triângulo $BCD = 25$ *u.a.* (simetria)

Logo, a área do quadrado é de 50 u.a.

Comentários

A resolução 2 é preferível por não envolver o uso da fórmula que dá a área de um triângulo usando determinantes. Observe-se que para mostrar que um quadrilátero é um quadrado, é necessário provar duas coisas: lados de mesmo comprimento e paralelos (ou ângulos retos). Afinal, um losango – mesmo com 4 lados de mesmo comprimento – pode não ser um quadrado! E um retângulo tem lados paralelos e pode não ser um quadrado!

Questão 6

Considere a função: $S(x) = 1 + 2\text{sen } x + 4(\text{sen } x)^2 + 8(\text{sen } x)^3$ para $x \in R$.

a) Calcule $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Resolva a equação: $S(x) = 0$, para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Resposta esperada

a) $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\text{sen}\frac{\pi}{3} + 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 8\text{sen}^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= 1 + 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 4\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 8\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$

$= 1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} = 4(1 + \sqrt{3})$ **(1 ponto)**

b) Temos, fatorando:

$S(x) = 1 + 2\text{sen } x + 4\text{sen}^2 x + 8\text{ sen}^3 x$

$$1 + 2\text{sen}\,x + 4\text{sen}^2\,x(1 + 2\text{sen}\,x)$$

$$(1 + 2\text{sen}\,x)(1 + 4\text{sen}^2\,x) = 0$$

e, como $1 + 4\text{sen}^2\,x = (1 + 2\text{sen}\,x)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, temos: $1 + 2\text{sen}\,x = 0 \;\rightarrow\; \text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$

Sabendo-se que para $\alpha = \pi/6$ temos *sen* $x = {}^1/_2$ podemos escrever :

$$\alpha_1 = \pi + \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha_2 = 2\pi - \alpha = \frac{11\pi}{6}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 - 2\pi = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\alpha_4 = \alpha_2 - 2\pi = \frac{11\pi}{6} - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$$

Logo, os valores de $x \in [-2\pi, 2\pi]$ para os quais $S(x) = 0$ são: $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ **(4 pontos)**

Comentários

Ai está a primeira questão que envolve conteúdo de 2º grau, a saber, Trigonometria; a média obtida pelos candidatos, nessa questão, é bastante inferior às médias obtidas nas questões anteriores, sendo este fato considerado normal.

A análise de Funções Trigonométricas em intervalos do tipo $[-2\pi, 2\pi]$ não é comum no Ensino Médio, ainda que seja considerada extremamente importante no nível superior de Ensino.

Questão 7

Dado um número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número complexo $\bar{z} = x - iy$.

a) Resolva as equações: $z \cdot \bar{z} = 4$ e $(\bar{z})^2 = z^2$.

b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

Resposta esperada

a) A solução da equação $z \cdot \bar{z} = 4$ é dada por $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 4$ de onde $|z| = 2$ que representa uma circunferência centrada na origem e raio 2 que pode ser escrita como

$$S_1 = \{z \in C : |z| = 2\}$$

Para a outra equação $(\bar{z})^2 = z^2$ primeiramente fatoramos, isto é, escrevemos:

$$(\bar{z} - z)(\bar{z} + z) = 0$$

Daí emergem duas possibilidades, a saber:

(1) $(\bar{z} - z) = 0$ implica $\bar{z} = z$, isto é, z só pode ser real, logo somente o eixo dos reais, ou ainda

$$S_2 = \{z \in C : z \in R\}$$

(2) $(\bar{z} + z) = 0$ implica $\bar{z} = -z$, isto é, z só pode ser imaginário puro, logo somente o eixo complexo, ou ainda

$S_3 = \{z \in C : z \text{ imaginário puro}\}$

Enfim, a solução da equação $(\bar{z})^2 = z^2$ é dada pela união $S_2 \cup S_3$, ou ainda os eixos coordenados.

(2 pontos)

b) Pontos de intersecção dos lugares geométricos são dados pela intersecção $S = S_1 \cap (S_2 \cup S_3)$, ou seja: $S = \{-2, 2, -2i, 2i\}$

(3 pontos)

Comentários

O capítulo sobre número complexos não tem merecido destaque na preparação dos candidatos, especialmente a interpretação geométrica de equações envolvendo números complexos.

Questão 8

Considere as matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Calcule o determinante de *M* e a matriz inversa de *M*.

b) Resolva o sistema *MX* = *Y*.

Resposta esperada

a) Para calcular a matriz inversa, primeiramente calculamos o determinante associado à matriz dada, ou seja

$$\det M = \cos^2\theta - (-\operatorname{sen}^2\theta) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

A matriz inversa é calculada a partir da seguinte expressão

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}(M_c)^t$$

onde $(M_c)^t$ é a matriz transposta da matriz dos cofatores da matriz M. Então, temos:

$$M_c = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } (M_c)^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, como detM = 1 podemos escrever

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3 pontos)

b) Devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se à esquerda, ambos os membros, pela matriz M^{-1}, obtemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \\ z = 3 \end{cases}$$

(2 pontos)

Comentários

Esta questão, envolvendo matriz inversa e sistemas lineares, exige o domínio de técnicas algébricas próprias.

Questão 9

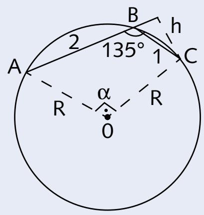
Sejam A, B e C pontos de uma circunferência tais que $\overline{AB}$ = 2 km, $\overline{BC}$ = 1 km e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja de 135°.

a) Calcule o raio dessa circunferência.

b) Calcule a área do triângulo ABC.

Resposta esperada

Considere a figura:



a) Da figura temos que o ângulo α é reto pois 360 – α = 2 . 135 logo: α = 90° e $(\overline{AC})^2 = R^2$ e também, pela lei dos co-senos, que:

$$(\overline{AC})^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 135° = 5 + 2\sqrt{2}$$

de onde podemos concluir que o raio da circunferência é: $R = \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{2}}{2}}$ **(3 pontos)**

b) Altura Δ_{ABC} relativa ao lado AB é: h = sen 45° = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ logo, a área do triângulo ABC é:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u.a.}$$ **(2 pontos)**

Comentários

Para resolver este problema é necessário o conhecimento de dois fatos básicos da geometria: 1) O ângulo central é igual ao dobro de qualquer ângulo com vértice sobre a circunferência e que subentende o mesmo arco. 2) Lei dos co-senos.

Por essas razões, esta questão é mais difícil e foram poucos os candidatos que apresentaram uma resolução completa e correta.

Questão 10

Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e p(t), o preço após t anos, pede-se:

a) a expressão para p(t);

b) o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se necessário, use: log 2 ≅ 0,301 e log 3 ≅ 0,477.

Resposta esperada

a) Preço inicial $\to$ F

Preço depois de um ano $\to$ 0,81 F

Preço depois de dois anos $\to$ 0,81 (0,81 F) = $(0,81)^2$ F

⋮ ⋮

Preço depois de t anos $\to$ $p(t) = (0,81)^t \cdot F$

Logo, a expressão (funcional) para p(t) é:

$p(t) = (0{,}81)^t \,.\, F$ **(1 ponto)**

b) Vamos encontrar os valores de t para os quais

$p(t) \leq 0{,}05 \,.\, F$ ou $(0{,}81)^t \,.\, F \leq 0{,}05\ F$

Supondo $F \neq 0$, temos: $(0{,}81)^t \,.\, F \leq 0{,}05$. Como é sabido, a função $\log_{10} \equiv \log$ é crescente de modo que:

$(0{,}81)^t \leq 0{,}05 \Rightarrow \log (0{,}81)^t \leq \log (0{,}05)$

ou

$t[\log 81 - \log 100] \leq \log 5 - \log 100$

ou ainda

$t[4\log 3 - 2] \leq 1 - \log 2 - 2 \Rightarrow t[1.908 - 2] \leq -1 - 0{,}301$

de modo que podemos escrever

$$t \geq \frac{1{,}301}{0{,}092} \cong 14{,}14$$

Então, o menor valor inteiro de t que satisfaz a essa desigualdade é t = 15, de onde o número mínimo de anos para que o preço do carro seja inferior a 5% do valor inicial é 15 anos. **(4 pontos)**

Comentários

Questão envolvendo um problema do cotidiano, cuja solução envolve uso de logaritmos e valores aproximados.

Questão 11

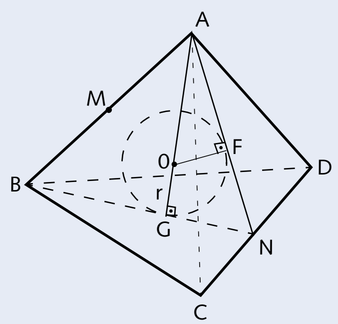
Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Para este tetraedro, calcule:

a) a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;

b) o raio da esfera inscrita no tetraedro.

Resposta esperada

Considere a figura abaixo onde M e N são os pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.



a) A distância $\overline{AN}$ é calculada através do teorema de Pitágoras aplicado, por exemplo, no triângulo retângulo $A\hat{N}D$, isto é:

$(\overline{AD})^2 = (\overline{DN})^2 + (\overline{AN})^2$ de onde $\overline{AN} = 3\sqrt{3}\ cm$

Novamente, através do teorema de Pitágoras, agora no triângulo retângulo $A\hat{M}N$ temos:

$(\overline{AN})^2 = (\overline{MN})^2 + (\overline{MA})^2$ de onde obtemos $\overline{MN} = 3\sqrt{2}\ cm$

Então, a distância entre duas arestas opostas (por simetria são todas iguais) é $\overline{MN} = 3\sqrt{2}$.

(2 pontos)

b) Os triângulos AGN e AFO são semelhantes, de onde podemos escrever:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{GN}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AO}}$$ de onde, substituindo os valores, obtemos:

$$\frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{h-r}$$

logo, concluímos que r = h/4 onde h = $\overline{AG}$ é a altura do tetraedro (regular).

Mais uma vez utilizando o teorema de Pitágoras temos: $h^2 = (\overline{AN})^2 - (\overline{GN})^2$

ou ainda: $h^2 = (3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{3}3\sqrt{3}\right)^2 = 27 - 3 = 24$, de onde $h = 2\sqrt{6}$.

Logo, o raio da esfera inscrita é $\sqrt{6}/2\ cm$ **(3 pontos)**

Comentários

Questão clássica de geometria espacial. Aqui a grande dificuldade, para quase todos os candidatos é visualizar a figura correta o que permite, usando apenas o teorema de Pitágoras várias vezes, chegar aos resultados desejados.

Questão 12

a) Resolva a equação: $x^4 - 5x - 6 = 0$.

b) Mostre que, se a e b são números reais e se não são ambos nulos, então as raízes da equação $x^4 + ax + b = 0$ não podem ser todas reais.

Resposta esperada

a) As possíveis raízes de $x^4 - 5x - 6 = 0$ são ± 1, ±2, ±3, e ±6. Substituindo-se diretamente (verificação) vemos que x = –1 e x = 2 são raízes.
Utilizando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini (ou efetuando a divisão diretamente pelo método de Descartes) podemos escrever

$$x^4 - 5x - 6 = (x+1)(x+2)(x^2+x+3) = 0$$

de onde as outras duas raízes são

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$$

Então, as raízes da equação $x^4 - 5x - 6 = 0$ são $x = \frac{-1+\sqrt{11}\,i}{2}$, $x = \frac{-1-\sqrt{11}\,i}{2}$, x = –1 e x = 2.

(2 pontos)

b) Visto que (do enunciado) a e b não são ambos nulos, a equação $x^4 + ax + b = 0$ admite, no máximo, uma raiz nula. Então, no caso em que $b = 0$ podemos escrever :

$$x^4 + ax = x(x^3 + a) = 0$$

matemática

de onde uma raiz é x = 0 e as outras (só uma é real) são obtidas de $x^3 = -a$; logo duas são complexas.

No caso em que $a = 0$ temos que $x^4 = -b$ de onde pelo menos duas são complexas. Enfim, no caso geral em que α e β são raízes reais podemos utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para escrever:

$$(x-\alpha)(x-\beta)[x^2 + (\alpha+\beta)\mathrm{x} + \alpha^2 + \alpha\beta\beta^2] = 0$$

A equação do segundo grau:

$$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$$

não admite raízes reais uma vez que o discriminante

$$\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) =$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) =$$

$$= -3\alpha^2 - 3\beta^2 - 2\alpha\beta =$$

$$= -2(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha+\beta)^2 < 0$$

De onde concluímos que duas raízes são complexas. **(3 pontos)**

Comentários

Muitos candidatos conseguiram obter as duas raízes reais, usando o fato de que as possíveis raízes inteiras são divisores do termo constante. Alguns foram além, tendo obtido também as duas raízes complexas. A parte **b** mostrou-se muito difícil e não houve, praticamente, solução correta desta parte.