# UNICAMP 2001

# caderno de questões

A Unicamp
comenta
suas provas

UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE
PARA OS VESTIBULARES

banespa
Universidades

**As questões da segunda fase da prova de matemática procuram avaliar os conteúdos usualmente presentes no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. As primeiras questões envolvem apenas as noções básicas de matemática além da capacidade de leitura e raciocínio; as questões intermediárias enfocam, normalmente, os conteúdos de quinta a oitava séries e as últimas dizem respeito ao Ensino Médio. Em quase todas as questões, mesmo nas mais complexas, um dos itens é uma pergunta simples cujo objetivo é levar o candidato até o final da prova. Além disso, a maioria das questões envolve, cada uma delas, diversos tópicos do conteúdo programático.**

## QUESTÃO 1

**Um determinado ano da última década do século XX é representado, na base 10, pelo número *abba* e um outro, da primeira década do século XXI, é representado, também na base 10, pelo número *cddc*.**

**a) Escreva esses dois números.**

**b) A que século pertencerá o ano representado pela soma *abba+cddc* ?**

**Resposta esperada**

a) $abba = 1991$ e $cddc = 2002$
Resposta: Os números pedidos são 1991 e 2002. **(2 pontos)**

b) $1991 + 2002 = 3993$ (século 40)
Resposta: A soma é igual a 3993, que representa um ano do século XL. **(3 pontos)**

**Comentários**

Questão simples, cujo objetivo é saber representar um número e reconhecer o século ao qual um dado ano pertenceu. Muitos candidatos não sabem escrever um número em algarismos romanos – esta forma ainda é usada em situações específicas. Entretanto, quando o candidato respondeu corretamente, escrevendo apenas século 40, isto foi considerado satisfatório. A nota média, considerados os candidatos presentes [13.910], foi de 3,94 na escala [0 – 5].

## QUESTÃO 2

**A soma de dois números positivos é igual ao triplo da diferença entre esses mesmos dois números. Essa diferença, por sua vez, é igual ao dobro do quociente do maior pelo menor.**

**a) Encontre esses dois números.**

**b) Escreva uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ cujas raízes são aqueles dois números.**

**Resposta esperada**

a) Sejam $x$ e $y$ os dois números, e suponhamos que $x > y$. A partir do enunciado, podemos escrever o seguinte sistema linear de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 3(x - y) \\ x - y = 2\dfrac{x}{y} \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $x = 2y$ e, fazendo-se a substituição na segunda equação, tem-se:

$2y - y = 2\dfrac{2y}{y} = 4$, ou seja, $y = 4$ e, portanto, $x = 8$.

Resposta: Os números pedidos são 8 e 4. **(3 pontos)**

b) Das relações entre raízes e coeficientes de uma equação do segundo grau com $a=1$, podemos escrever:
$x + y = 8 + 4 = 12 = -b$ e $xy = 8 \cdot 4 = 32 = c$.

Resposta: A equação do segundo grau é $x^2 - 12x + 32 = 0$ **(2 pontos)**

**Comentários**

Um dos objetivos dessa questão foi a transcrição em linguagem matemática. O candidato deveria deixar claro qual dos números, $x$ ou $y$, seria tomado como o maior deles, para equacionar corretamente. Um erro freqüente foi apresentar a resposta como um polinômio e não como equação. A questão foi resolvida corretamente pela maioria dos candidatos e a média nessa questão foi de 3,04 na escala [0 – 5].

## QUESTÃO 3

**a) Quantos são os triângulos não congruentes cujas medidas dos lados são *números inteiros* e cujos perímetros medem 11 metros ?**
**b) Quantos dos triângulos considerados no item anterior são eqüiláteros ? E quantos são isósceles ?**

**Resposta esperada**

a) Sejam $a$, $b$ e $c$ as medidas, em metros, de 3 segmentos. Para que esses 3 segmentos formem um triângulo de perímetro 11, devemos ter:

$a + b + c = 11$; $a < b + c$; $b < a + c$ e $c < a + b$.

Então: $11 = a + b + c < b + c + b + c = 2(b + c)$.

Como $a$, $b$ e $c$ são números naturais e $b + c > 5{,}5$, segue-se que $b + c \geq 6$. Somando $a$ aos dois membros dessa última desigualdade, temos:

$11 \geq 6 + a$ o que implica $a \leq 5$.

O mesmo vale para $b$ e $c$, ou seja, todos os 3 números são menores ou iguais a 5. Podemos então construir a seguinte tabela:

| a | b | c |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 1 |
| 5 | 4 | 2 |
| 5 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 3 |

Observando que permutações dos mesmos números produzem triângulos congruentes, podemos concluir que existem apenas os 4 triângulos não congruentes apresentados na tabela acima.

Resposta: Existem apenas 4 triângulos não congruentes cujos lados são números inteiros (positivos) e cujos perímetros medem 11 metros. São eles: (5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 3, 3) e (4, 4, 3). **(3 pontos)**

b) Para que um triângulo de lados $a$, $b$ e $c$ seja equilátero é necessário que $a = b = c$ e, portanto, $3a = 3b = 3c = 11$.

Como 11 não é divisível por 3, segue-se que $a$, $b$ e $c$ não podem ser inteiros, ou seja, não existe triângulo equilátero com lados inteiros e perímetro igual a 11. Esta mesma conclusão pode ser obtida a partir da resposta (a), observando-se que nenhum dos 4 triângulos possíveis é equilátero. Os triângulos isósceles são: (5, 5, 1), (4, 4, 3) e (3, 3, 5), totalizando 3 triângulos.

Resposta: Nenhum triângulo é equilátero e três triângulos são isósceles. **(2 pontos)**

**Comentários**

Esta questão avalia vários conceitos básicos de geometria e aritmética, especialmente as condições para a existência de triângulos e a noção fundamental de congruência de triângulos. A média foi muito menor que a da questão anterior, ficando em 1,47 na escala [0 – 5].

## QUESTÃO 4

**Em um certo jogo são usadas fichas de cores e valores diferentes. Duas fichas brancas equivalem a três fichas amarelas, uma ficha amarela equivale a cinco fichas vermelhas, três fichas vermelhas equivalem a oito fichas pretas e uma ficha preta vale quinze pontos.**
**a) Quantos pontos vale cada ficha ?**
**b) Encontre todas as maneiras possíveis para totalizar 560 pontos, usando, em cada soma, no máximo cinco fichas de cada cor.**

**Resposta esperada**

a) Seja $a$ o número de pontos de uma ficha amarela, $b$ o número de pontos de uma ficha branca, $v$ o número de pontos de uma ficha vermelha e $p = 15$ o número de pontos de uma ficha preta. Então: $2b = 3a$, $a = 5v$, $3v = 8p$ e $p = 15$.

Logo: $v = 40$, $a = 200$ e $b = 300$.

Resposta: Cada ficha vermelha vale 40 pontos; cada ficha amarela, 200 pontos; cada ficha branca, 300 pontos. **(2 pontos)**

b) Para totalizar 560 pontos podemos usar, no máximo, 1 ficha branca. Usando uma ficha branca, restam 260 pontos que podem ser obtidos com 1 ficha amarela e 4 pretas ou com 5 vermelhas e 4 pretas. Não usando ficha branca, podemos usar 2 amarelas e 4 vermelhas. Estas são as únicas respostas possíveis.

Resposta: (i) 1 ficha branca, 1 amarela e 4 pretas. (ii) 1 ficha branca, 5 vermelhas e 4 pretas. (iii) 2 amarelas e 4 vermelhas. **(3 pontos)**

**Comentários**

A solução dessa questão exige uma análise cuidadosa mas nenhum conteúdo matemático mais profundo. A parte (b) desta questão poderia também ser colocada no contexto de soluções inteiras não negativas da equação: $15x + 40y + 200z + 300w = 560$, onde $x$, $y$, $z$ e $w$ são as quantidades de fichas pretas, que valem 15 pontos, de fichas vermelhas, 40 pontos, fichas amarelas, 200 pontos e fichas brancas, 300 pontos. A maioria dos candidatos foi bem sucedida na resolução dessa questão, o que se refletiu na média de 3,84 na escala [0 – 5].

## QUESTÃO 5

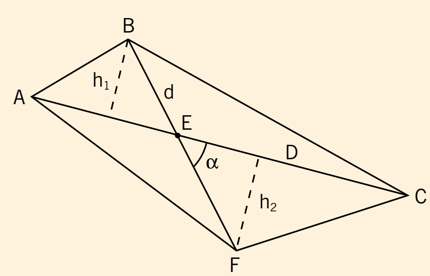
**As diagonais $D$ e $d$ de um quadrilátero convexo, não necessariamente regular, formam um ângulo agudo.**

**a) Mostre que a área desse quadrilátero é $\dfrac{D \cdot d}{2} \operatorname{sen} \alpha$.**

**b) Calcule a área de um quadrilátero convexo para o qual $D = 8$ cm, $d = 6$ cm e $\alpha = 30°$.**

**Resposta esperada**

a) No quadrilátero ABCF da figura abaixo:




Seja E o ponto de intersecção das diagonais D e d e sejam $h_1$ e $h_2$ as alturas dos triângulos ABC e ACF, respectivamente. Então temos: $h_1 = \overline{BE} \cdot \operatorname{sen} \alpha$ e $h_2 = \overline{FE} \cdot \operatorname{sen} \alpha$.

A área S do quadrilátero é igual à soma das áreas dos triângulos ABC e ACF, ou seja:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BE} \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{FE} \cdot \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot (\overline{BE} + \overline{FE}) \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} D \cdot d \cdot \operatorname{sen} \alpha$$ **(3 pontos)**

b) Para calcular a área do quadrilátero para o qual $D = 8$ cm, $d = 6$ cm e $\alpha = 30°$, basta observar que $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$ e substituir na fórmula acima:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Resposta: A área do quadrilátero é de 12 $cm^2$. **(2 pontos)**

**Comentários**

Os candidatos tiveram a oportunidade para “demonstrar” uma fórmula de geometria e, em seguida, aplicá-la. A decomposição de uma figura plana em triângulos é um procedimento importante e, nesse caso, muito simples. Convém observar que a parte (b) pode ser resolvida usando a parte (a) mesmo que o candidato não tenha demonstrado a fórmula e muitos fizeram isso, o que contribuiu para que a nota média dessa questão se aproximasse de 2, na escala [0 – 5]. Convém também salientar a dificuldade generalizada com demonstrações – conseqüência do descuido com essa componente importante da matemática, e não somente da geometria, no ensino médio e no ensino fundamental. Além disso, muitos vestibulandos particularizaram o quadrilátero, considerando-o um quadrado, ou um losango, um paralelogramo ou até mesmo um trapézio. Outros consideraram que as diagonais se cortam nos seus pontos médios ou que são perpendiculares. Na parte (b) a omissão da unidade foi o erro mais freqüente.

## QUESTÃO 6

**Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: F($t$) = $a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável $t$ é dada em anos e $a$ e $b$ são constantes.**

**a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial ($t$ = 0) seja igual a 1024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.**

**b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial?**

**c) Esboce o gráfico da função F($t$) para $t \in [0, 40]$.**

**Resposta esperada**

a) Fazendo $t = 0$ na expressão $F(t) = a \cdot 2^{-bt}$ tem-se: $F(0) = a \cdot 2^{-b0} \Rightarrow a = 1024 = 2^{10}$

De modo que já temos $a = 2^{10}$ e, conseqüentemente, $F(t) = 2^{10} \cdot 2^{-bt} = (2^{10})^{-bt}$

Fazendo $t = 10$, tem-se: $F(10) = 2^{10-10.b} = \frac{1}{2} \cdot 1024 = \frac{1}{2} \cdot 2^{10} = 2^9$, de onde podemos concluir que:

$10 - 10 \cdot b = 9$ e, portanto: $b = \frac{1}{10}$

Resposta: $a = 1024 = 2^{10}$ e $b = \frac{1}{10}$ **(2 pontos)**

**Observação:** Para esta última conclusão estamos usando a “injetividade” da função exponencial $y=2^x$, isto é: “Se $x_1$ e $x_2$ são números reais tais que $2^{x_1} = 2^{x_2}$, então $x_1=x_2$”. No caso, $2^{10-10\,.\,b} = 2^9$ implica $10 - 10 \cdot b = 9$. Esta propriedade (injetividade) não é válida para todas as funções. Por exemplo: $\cos(x_1) = \cos(x_2)$ não implica $x_1=x_2$.

b) Vamos encontrar o valor de $t$ para o qual $F(t) = \frac{1}{8} \cdot 2^{10} = 2^7$

Como a função $F(t) = 2^{10} - \frac{t}{10} = 7$ é decrescente (ou seja, diminui à medida que $t$ aumenta), o valor de $t$ para o qual $F(t) = 2^7$ é o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial.

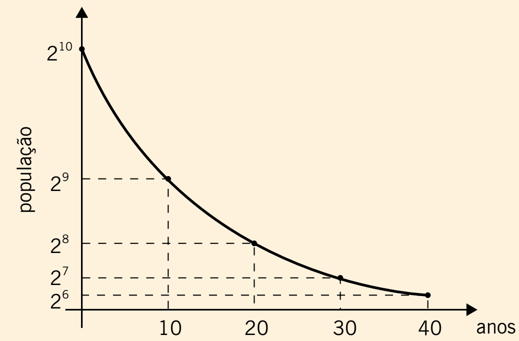
Então, basta resolver a equação: $2^{10-\frac{t}{10}} = 2^7$, ou seja : $10 - \frac{t}{10} = 7$, o que significa $t = 30$

Resposta: O tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial é de 30 anos. **(1 ponto)**

c) Devemos usar o resultados obtidos em (a) e (b) para escrever a tabela abaixo e depois traçar o gráfico da função no intervalo [0, 40].

| $t$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(t)$ | $2^{10}$ | $2^9$ | $2^8$ | $2^7$ | $2^6$ |

Note que após cada período de 10 anos, F(t) se reduz à metade do valor no início do período.




**(2 pontos)**

**Comentários**

O conhecimento da função exponencial $y = a^x$ é indispensável, visto que esta função descreve muitos fenômenos naturais importantes, como é o caso da variação populacional apresentada nesse exemplo. Observe que "à medida que $t$ cresce, $F(t)$ decresce"; entretanto, $F(t)$ nunca será igual a zero, ou seja, o gráfico não deve cortar o eixo horizontal, mesmo que $t$ seja tomado como "arbitrariamente grande". Seria interessante analisar o que ocorre com a população descrita por essa função depois de 90 anos! A nota média dessa questão, foi de 3,39 na escala [0 – 5].

## QUESTÃO 7

**Seja *A* a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:**

$$\begin{cases} \lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \lambda + \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \lambda + \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \lambda \boldsymbol{z} = \lambda + \mathbf{2} \end{cases}$$

**a) Ache as raízes da equação: det(A)=0.**
**b) Ache a solução geral desse sistema para= –2.**

**Resposta esperada**

a) A matriz dos coeficientes do sistema linear dado é:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se pela primeira linha, temos:

$$\det(A) = \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)[\lambda(\lambda + 1) - 2] = (\lambda - 1)[\lambda^2 + \lambda - 2].$$

As raízes da equação:

$\det(A) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$ são dadas por:

$\lambda - 1 = 0$ e $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, ou seja, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.

Resposta: As raízes da equação $\det(A) = 0$ são: $\lambda = 1$ (dupla) e $\lambda = -2$. **(3 pontos)**

b) Para $\lambda = -2$, o sistema linear é:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Tal sistema é homogêneo, isto é, os termos constantes são todos iguais a zero, e, por isso, x = y = z = 0, ou seja (0, 0, 0) é uma solução. Assim sendo, este sistema *é possível*, isto é, possui pelo menos uma solução. Como para $\lambda = -2$, det($A$) = 0, o sistema em questão é *indeterminado*. Isto quer dizer que o sistema tem mais de uma solução e, por ser linear, tem na verdade infinitas soluções. Estas soluções podem ser encontradas por escalonamento, por exemplo. Este método produz o seguinte sistema, equivalente ao inicial:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Podemos então concluir que $x = z$ e $y = z$, ou seja: para cada valor atribuído à variável $z$, podemos encontrar os valores correspondentes para $x$ e $y$. Fazendo então $z = \alpha$ tem-se: $x = \alpha$ e $y = \alpha$.

Resposta: O conjunto solução do sistema para $\lambda = -2$ é $\{(\alpha, \alpha, \alpha);\ \forall \alpha \in R\}$ **(2 pontos)**

**Comentários**

Esta questão pretende avaliar: (i) O conceito de matriz dos coeficientes de um sistema linear e o cálculo de seu determinante. (ii) Raízes de uma equação do terceiro grau e raízes múltiplas. (iii) Resolução de um sistema linear homogêneo indeterminado.

A média obtida pelos candidatos nessa questão foi de 1,25, bem abaixo da média esperada pela Banca.

## QUESTÃO 8

**Sejam *A* e *B* os pontos de intersecção da parábola  com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.**

**a) Quais as coordenadas dos pontos *A* e *B* ?**

**b) Se P é um ponto da circunferência diferente de *A* e de *B*, calcule as medidas possíveis para os ângulos $A\hat{P}B$.**

**Resposta esperada**

a) A equação da circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ é:

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2$, ou seja, $x^2 + y^2 = 2$.

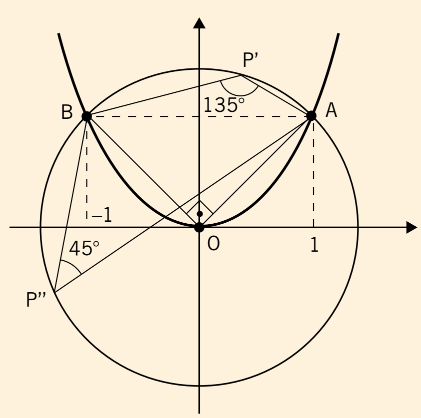
As coordenadas dos pontos de intersecção dessa circunferência com a parábola $y = x^2$ são as soluções do sistema não linear:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

Substituindo $y = x^2$ na primeira equação obtemos a equação biquadrada: $x^4 + x^2 - 2 = 0$, cujas raízes reais são: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.

Como $y = x^2$, temos um único valor correspondente para $y$, a saber: $y = 1$.

Resposta: Os pontos de intersecção são: A(1, 1) e B(–1, 1). **(2 pontos)**



b) Vamos mostrar que o triângulo AOB, onde O é o centro da circunferência $x^2 + y^2 = 2$ e A e B são os pontos obtidos anteriormente, é retângulo.

De fato: $\overline{AB}^2 = (-1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = 4$ e $\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 4$.

Assim, $\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{AB}^2$ e pela recíproca do teorema de Pitágoras, o triângulo AOB é retângulo.

Se P' está no arco correspondente ao ângulo central de 90°, então o arco correspondente ao ângulo AP'B mede 270° e, portanto, o ângulo AP'B mede 135°.
Se P'' está no arco correspondente ao ângulo central de 270°, então o arco correspondente ao ângulo AP''B mede 90° e, portanto, o ângulo AP''B mede 45°.

Resposta: As medidas possíveis para o ângulo APB são 45° e 135°. **(3 pontos)**

**Comentários**

Esta questão procura relacionar conhecimentos de álgebra e geometria. O fato matemático fundamental é: a medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo cujo vértice está sobre a circunferência, ambos subentendendo o mesmo arco. A nota média foi muito baixa, talvez refletindo a separação álgebra/geometria que ainda é muito comum no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

## QUESTÃO 9

**Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares consecutivos cuja soma é 15.**
**a) Quais são esses números ?**
**b) Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.**
**c) Sendo $\alpha$ e $\beta$ os outros dois ângulos do referido triângulo, com $\beta > \alpha$, mostre que $\text{sen}^2\,\beta - \text{sen}^2\,\alpha < \frac{1}{4}$.**

**Resposta esperada**

a) Sejam $a$, $a + 2$ e $a + 4$ os 3 números ímpares consecutivos que são as medidas dos lados do triângulo.

Então: $a + (a + 2) + (a + 4) = 15$ o que implica de imediato $a = 3$.

Resposta: Os números são: 3, 5 e 7. **(1 ponto)**

b) Sabendo-se que o maior ângulo é oposto ao maior lado e utilizando a lei dos cosenos, temos:

$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{-1}{2}$.

Resposta: O maior ângulo é $\theta = 120°$ **(2 pontos)**

c) Pela lei dos senos: $\frac{7}{\text{sen}\,120°} = \frac{5}{\text{sen}\,\beta} = \frac{3}{\text{sen}\,\alpha}$ de onde concluímos que:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ e $\text{sen}\,\beta = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ uma vez que $\text{sen}\,120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Então: $(\text{sen}^2\,\beta) - (\text{sen}^2\,\alpha) = \frac{75}{196} - \frac{27}{196} = \frac{48}{196} < \frac{1}{4}$

Resposta: $(\text{sen}^2\,\beta) - (\text{sen}^2\,\alpha) < \frac{1}{4}$ **(2 pontos)**

**Comentários**

Esta questão explorou a trigonometria de um triângulo qualquer, em particular as leis do *seno* e do *coseno*. Consideramos importante observar que $\theta > \beta > \alpha$ visto que a omissão desse cuidado produziu erros para muitos candidatos. Também é importante observar que o ângulo para o qual $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ é $\theta = 120°$ e não $\theta = 60°$. Muitos candidatos chegaram a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, erraram tudo.

A média final dos presentes nessa questão foi de 1,67; observamos que tal média é conseqüência da facilidade da parte (a) que proporcionou 1 ponto aos candidatos que não desistiram antes de chegar a essa altura da prova.

## QUESTÃO 10

**Para representar um número natural positivo na base 2, escreve-se esse número como soma de potências de 2. Por exemplo: $13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1101$.**

**a) Escreva o número $2^6 + 13$ na base 2.**

**b) Quantos números naturais positivos podem ser escritos na base 2 usando-se exatamente cinco algarismos?**

**c) Escolhendo-se ao acaso um número natural $n$ tal que $1 \leq n \leq 2^{50}$, qual a probabilidade de que sejam usados exatamente quarenta e cinco algarismos para representar o número $n$ na base 2?**

**Resposta esperada**

a) Devemos escrever o número $2^6 + 13$ como soma de potências de 2, isto é:

$$2^6 + 13 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1001101_2.$$

Resposta: O número $2^6 + 13 = 77_{10}$ escreve-se na base 2 como 1001101. **(1 ponto)**

b) Um número que se escreve na base 2 com exatamente 5 algarismos é da forma:

$1 \cdot 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$ onde $a$, $b$, $c$ e $d$ podem assumir valores 0 ou 1.

De modo que temos *duas* possibilidades para cada uma dessas quatro letras; pelo princípio multiplicativo, podemos concluir que temos $2^4$ possibilidades, ou seja, são exatamente 16 estes números.

Resposta: São 16 os números que se escrevem na base 2 usando exatamente 5 algarismos. **(2 pontos)**

c) Entre 1 e $2^{50}$ temos $2^{50}$ números naturais.

Representados na base 2 com 45 algarismos existem $2^{44}$ números naturais – para ver isto basta repetir o raciocínio usado na parte (b). Portanto, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{2^{44}}{2^{50}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Resposta: A probabilidade é igual a $\frac{1}{64}$. **(2 pontos)**

**Comentários**

Essa questão abordou as noções básicas de contagem, sistema de numeração na base 2 e probabilidade. O resultado evidencia que esses conceitos fundamentais ainda não são dominados pelos vestibulandos e, como conseqüência, a média final foi uma das menores da prova de matemática: 0,73 na escala [0 – 5].

## QUESTÃO 11

**Considere a equação: $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$.**

**a) Mostre que $x = i$ é raiz dessa equação.**

**b) Encontre as outras raízes da mesma equação.**

**Resposta esperada**

a) Substituindo $x = i$ na equação dada e lembrando que, para esse valor de x, $x^2 = -1$, tem-se:

$$2\left(i^2 + \frac{1}{i^2}\right) + 7\left(i + \frac{1}{i}\right) + 4 = 0 \Rightarrow 2\left(-1 + \frac{1}{-i}\right) + 7 \cdot 0 + 4 = 2 \cdot (-2) + 4 = 0$$

Resposta: $x = i$ é raiz da equação dada. **(2 pontos)**

b) Se $x = i$ é raiz da equação, como os coeficientes são reais, $x = -i$, que é o conjugado de $i$, também é raiz da mesma equação. Além disso:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \Rightarrow \frac{2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2}{x^2} = 0$$

se, e somente se, $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = 0$.

Como $x = i$ e $x = -i$ são raízes dessa equação, segue-se que o polinômio $p(x) = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2$ é divisível por $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$.

Na verdade: $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = (x^2 + 1)(2x^2 + 7x + 2)$.

Resolvendo a equação do segundo grau $2x^2 + 7x + 2 = 0$, obteremos as raízes;

$$x_3 = \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{e} \quad x_4 = \frac{-7 - \sqrt{33}}{2}.$$

Resposta: As quatro raízes da equação dada são: i, –i, $\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}$, $\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}$. **(3 pontos)**

**Comentários**

Números complexos e raízes de polinômios são os tópicos envolvidos nessa questão. Estes conteúdos são, em geral, os últimos no programa do Ensino Médio e, por isso mesmo, nem sempre são tratados adequadamente. A média final foi de 1,86 pontos na escala de zero a cinco.

## QUESTÃO 12

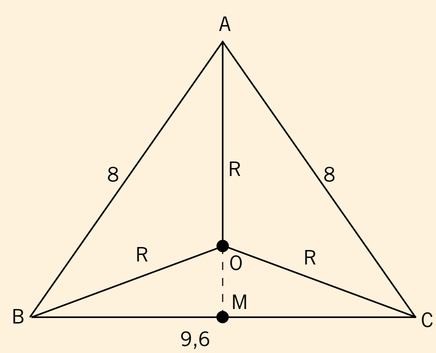
**Seja *P* um ponto do espaço eqüidistante dos vértices *A*, *B* e *C* de um triângulo cujos lados medem 8 cm, 8 cm e 9,6 cm. Sendo d(*P*, *A*)=10 cm, calcule:**

**a) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*;**

**b) a altura do tetraedro, *não regular,* cujo vértice é o ponto *P* e cuja base é o triângulo *ABC*.**

**Resposta esperada**

a)




Sejam *O* o centro e *R* o raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*; seja ainda *M* o ponto médio do lado *BC*. O triângulo *AMC* é retângulo, de modo que:

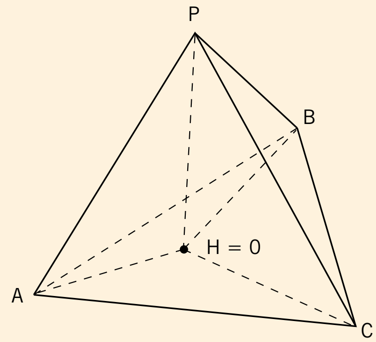
$\overline{AM}^2 + (4{,}8)^2 = 64$, ou seja, $\overline{AM}^2 = 40{,}96$ e, portanto, $\overline{AM} = 6{,}4$ cm.

No triângulo *OMC*, temos: $R^2 = \overline{OM}^2 + (4{,}8)^2$.

Como $\overline{OM} = \overline{AM} - R = 6{,}4 - R$, segue-se que:

$R^2 = (6{,}4 - R)^2 + (4{,}8)^2$ de onde tiramos que $R = 5$ cm.

Resposta: O raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede 5 cm. **(2 pontos)** b)




O ponto H, pé da perpendicular ao plano do triângulo ABC, baixada a partir do ponto P, coincide com o ponto O.

De fato: como $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, os triângulos retângulos PHA, PHB e PHC são congruentes e, portanto, o ponto H é eqüidistante de A, B e C ou seja H é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, isto é, H coincide com O.

Então, a altura PH do tetraedro é dada por: $\overline{AH}^2 = 10^2 - 5^3 = 75$, ou seja, $\overline{AH} = 5\sqrt{3}$ cm.

Resposta: a altura do tetraedro mede $5\sqrt{3}$ cm. **(3 pontos)**

**Comentários**

Este é um problema clássico de geometria no espaço e a matemática necessária para resolvê-lo, além da visão espacial indispensável, se reduz ao uso apropriado do teorema de Pitágoras. A média final de 0,27 nessa questão foi a mais baixa da prova, como tem acontecido nos últimos anos com a questão envolvendo geometria espacial. Isto que dizer que o entendimento dessa parte da geometria continua deficiente.