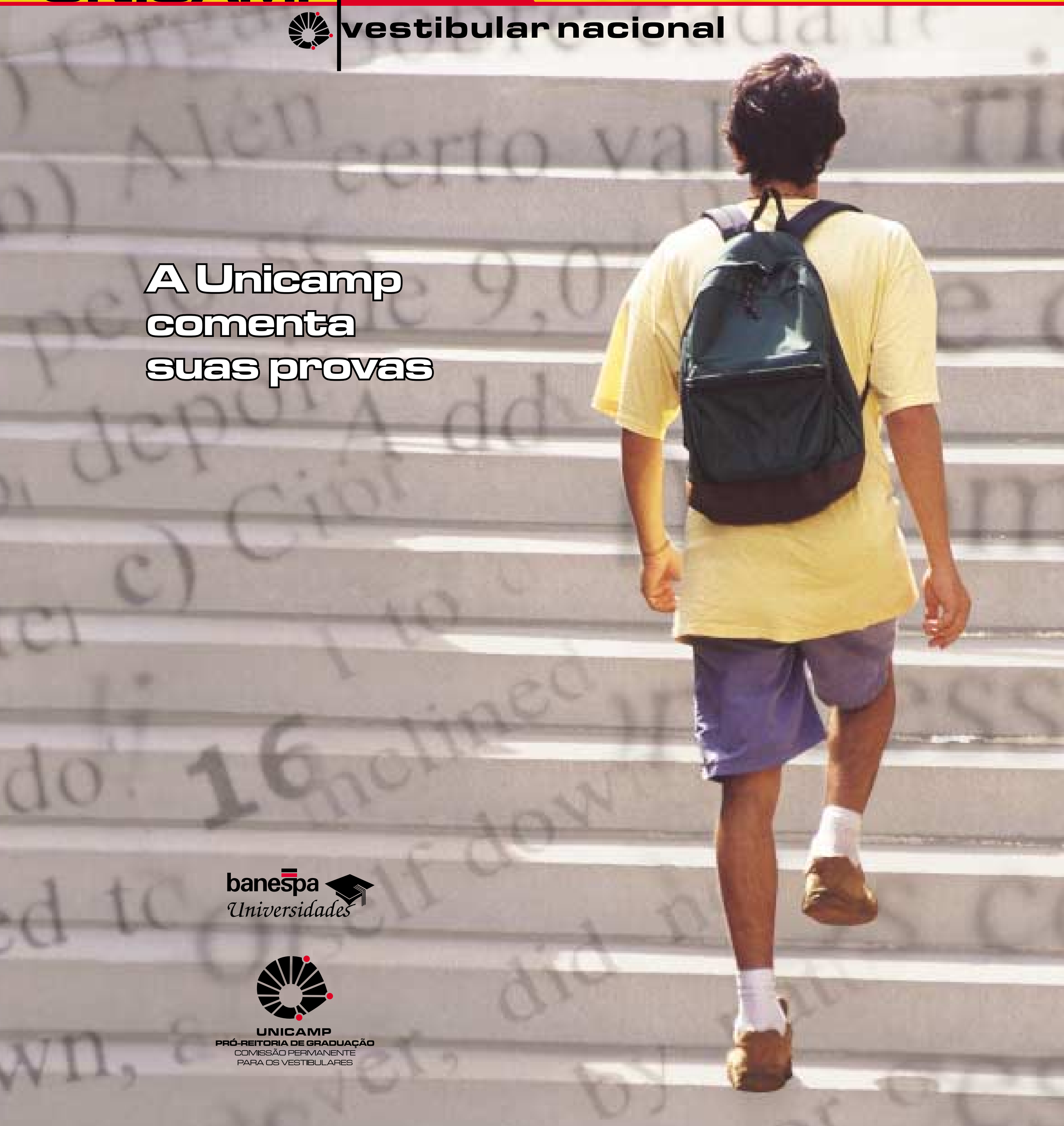
Caderno de Questões

UNICAMP 2002
vestibular nacional



A Unicamp comenta suas provas

banespa Universidades

UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE
PARA OS VESTIBULARES

Matemática

UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES

banespa
Universidades

A prova

As questões da segunda fase da prova de matemática procuram avaliar o domínio dos conteúdos usualmente presentes no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. As primeiras questões envolvem apenas as noções básicas de matemática, além da capacidade de leitura e raciocínio; as questões intermediárias enfocam, normalmente, os conteúdos de quinta a oitava séries e as últimas dizem respeito ao Ensino Médio. Em quase todas as questões, mesmo nas mais complexas, um dos itens é uma pergunta simples cujo objetivo é levar o candidato até o final da prova. Além disso, uma mesma questão envolve, na maioria dos casos, diversos tópicos do conteúdo programático.

Questão 1

Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

Resposta esperada

a) O custo de um plano telefônico é dividido em duas partes. Há um custo fixo, f, e outro adicional, d, que depende do tempo de utilização em minutos, aqui chamado de t. O custo mensal total é dado por $c = f + d.t$. Devemos considerar apenas o caso em que $t = 25$.
Para o plano A temos f = R$35,00 e d = R$0,50, de modo que o custo total é $35{,}00 + 0{,}50 \cdot 25 =$ R$47,50. No plano B, f = R$20,00 e d = R$0,80. Assim, obtemos um custo total de $20{,}00 + 0{,}80 \cdot 25 =$ R$40,00. Já no plano C, não há custo fixo e d = R$1,20, de modo que $c = 1{,}20 \cdot 25 =$ R$30,00.
Resposta: O plano C é mais vantajoso.
(3 pontos)

b) Para que o plano A seja mais vantajoso que os demais, é preciso que $c_A < c_B$ e também que $c_A < c_C$. Observamos que $c_A < c_B$ se $35{,}00 + 0{,}50t < 20{,}00 + 0.80t$. Isso equivale a exigir que $15{,}00 < 0{,}30t$, ou seja, que $t > \frac{15,00}{0,30} = \frac{1500}{30} = 50$.

Da mesma forma, a condição $c_A < c_C$ é equivalente a $35{,}00 + 0{,}50t < 1{,}20t$. Essa inequação pode ser reescrita na forma $35{,}00 < 0{,}70t$. Daí concluímos que $t > \frac{35,00}{0,70} = \frac{3500}{70} = 50$.

Resposta: A partir de 50 minutos, o plano A é mais vantajoso que os outros dois.
(2 pontos)

Exemplo acima da média

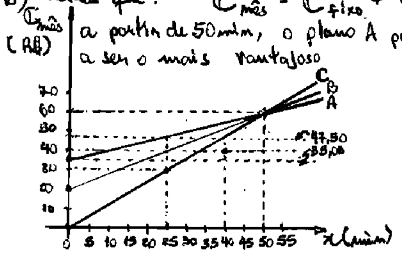
a)

Plano	Custo/minuto	Custo de 25min	custo mensal
A	R$0,50	R$12,50	R$47,50
B	R$ 0,80	R$ 20,00	R$ 40,00
C	R$1,20	R$ 30,00	R$ 30,00

onde
Custo mensal = custo fixo + custo de 25min

Resposta a) O plano mais vantajoso para 25 min de uso por mês é : o plano C

b) temos que: $C_{mês} = C_{fixo} + C_{min} \cdot x$, onde:
$C_{mês}$: custo ao mês
C_{fixo}: custo fixo
C_{min}: custo por min.
x : tempo de uso, em min.



Resposta: O gráfico ao lado sugere que a partir de 50 min o plano A é mais vantajoso

Exemplo abaixo da média

Plano C:
a) 25min/mês – 25 X 1,20 = R$30,00
→ Plano C é o mais vantajoso pois não tem custo fixo a acrescentar.
b) Até 50 min. todos apresentam mesmo gasto mensal. A partir de 51 minutos mensais:

A	B	C
0,50.51+ 5 = R$ 60,50	0,80 . 51 = R$60,80	1,20 . 51 = R$61,20

→ R: Plano A passa a ser + vantajoso a partir de 51 minutos mensais.

Comentários

Esta questão simples aborda os conceitos de função linear e de desigualdades. No item **a**, o candidato precisava apenas formular o custo de cada plano como uma função linear de t (o tempo de utilização) e, então, calcular o valor dessa função para t = 25 minutos. Para responder o item **b**, o candidato deveria ser capaz de manipular desigualdades com o fim de isolar a variável t. Em seguida, era preciso analisar a interseção dos intervalos de t que satisfazem duas desigualdades. O traçado dos gráficos das três funções custo também poderia ser utilizado na obtenção da resposta do item **b**.

Questão 2

Um fio de 48cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.

a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

Resposta esperada

a) Sejam x e (48 – x) os comprimentos das duas partes. Para que a área de um dos quadrados seja quatro vezes a área do outro, o seu perímetro, x, deve ser igual a duas vezes o perímetro do outro, 48 – x. Assim, x = 2(48 – x), ou seja, 3x = 96, donde x = 32.
Resposta: O comprimento de uma das partes do fio deve ser igual a 32cm e a outra parte deve ter 16cm.
(3 pontos)

b) Se o comprimento do fio é 32cm, o lado de um dos quadrados mede 8cm e, portanto, sua área será de 8 x 8 = 64cm^2 . Analogamente, o lado do outro quadrado será de 4cm e, portanto, sua área de 4 x 4 = 16cm2.
Resposta: A área do quadrado maior será de 64cm^2 e a do quadrado menor será de 16cm^2.
(2 pontos)

Exemplo acima da média

A) PARA QUE O QUADRADO MENOR DE LADO x TENHA UMA ÁREA 4 VEZES MENOR QUE O QUADRADO MAIOR ESTE DEVE TER LADO 2X PORTANTO
$4x + 8X = 48 \Rightarrow 12x = 48 \Rightarrow x = 4cm$
SENDO ASSIM O PEDAÇO DO FIO QUE FORMA O QUADRADO MENOR tem 16 cm (4.x) e o outro PEDAÇO tem 32 cm (8.x).
B) □ MENOR: $A = x^2$, $\boxed{A = 16cm^2}$
□ MAIOR: $A = 2x^2$, $\boxed{A = 64 cm^2}$
Os QUADRADOS tem ÁREA DE 16cm² e 64cm²

Exemplo abaixo da média

a) O comprimento de cada um dos fios deve ser 32cm e 16 cm

$$\begin{array}{r} 32 \\ 8 \\ \times 8 \\ \hline 64 \end{array} \qquad \times 4 \qquad \begin{array}{r} 16 \\ 4 \\ \times 4 \\ \hline 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \end{array} \rightarrow 64$$

b)

$A = \ell^2$

$A = 8^2 = \underline{64 cm^2}$

$A = \ell^2$

$A = 4^2 = \underline{16 cm^2}$

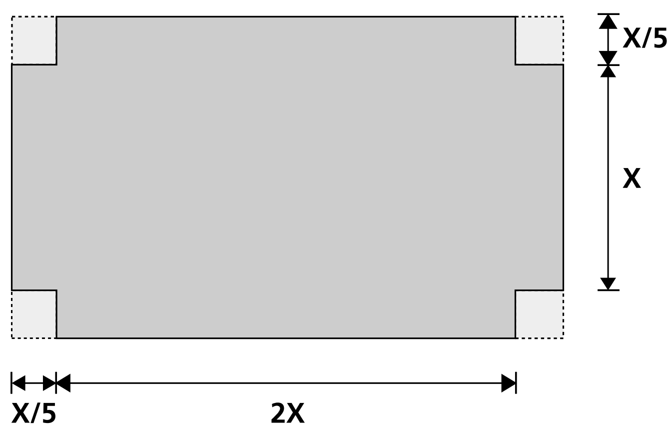
R: O quadrado maior área é 64 cm² e a área menor do 16 cm²

Comentários

Questão simples envolvendo conhecimentos básicos de geometria, como perímetro, área do quadrado e a relação entre eles. Foi resolvida corretamente pela maioria dos candidatos.

Questão 3

A figura abaixo é a planificação de uma caixa sem tampa:



a) Encontre o valor de x, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.

b) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

Resposta esperada

a) Sendo as medidas da caixa 2x, x e x/5, o seu volume será $V = 2x \cdot x \cdot x / 5 = 2x^3 / 5$.
Para uma capacidade de 50 litros, ou seja, $50dm^3$, temos e, portanto, x = 5dm = 50cm.
Resposta: x = 50 centímetros.
(3 pontos)

b) Sendo as dimensões da folha 2 x + 2x / 5 = 120cm e x + 2x / 5 = 70cm, sua área será de 120 x 70 = $8.400cm^2 = 0,84\ m^2$. Como cada metro quadrado custa R$10,00, o custo da caixa será de 0,84 x 10 = 8,40.
Resposta: O custo de uma das caixas, considerando-se apenas a folha retangular utilizada, é R$8,40.
(2 pontos)

Exemplo acima da média

a) Volume = Área da base × altura

$V = Ab . h$ $\quad x^3 = 125 \quad 1\,dm = 10\,cm$

$50 = (2x . x) . \frac{x}{5} \quad \underline{x = 5\,dm} \quad 5\,dm = \underline{50\,cm}$

$50 = \frac{2}{5} x^3$

R: O valor de x será 50 cm.

b) $1m = 10\,dm$

$0{,}5m = 5\,dm$

folha retangular plana

$lado_1 = \frac{x}{5} + x + \frac{x}{5} = \frac{7x}{5} = \frac{7.0{,}5}{5} = \frac{7}{10} = 0{,}7\,m$

$lado_2 = \frac{x}{5} + 2x + \frac{x}{5} = \frac{12x}{5} = \frac{12.0{,}5}{5} = \frac{12}{10} = 1{,}2\,m$

$A = 0{,}7 . 1{,}2 = 0{,}84\,m^2$

$1\,m^2$ — R\$ 10,00

$0{,}84\,m^2$ — R\$ $\quad \underline{R\$\ 8{,}40}$

R: O custo da folha retangular plana será de R\$ 8,40

Exemplo abaixo da média

a) $1\,cm^3 - 1\,mL$

$50.000\,cm^3 - 50.000\,mL$

$A_{CAIXA} = A_{TOTAL} - 4\,A_{QUADRADINHOS}$

$A_{CAIXA} = \left(x + \frac{2x}{5}\right)\left(\frac{2x}{5} + 2x\right) - 4 \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^2$

$A_{CAIXA} = \frac{80x^2}{25}$

Comentários

Questão elementar que exige apenas o conhecimento de conversão de unidades, área de um retângulo e o volume de um paralelepípedo.

Questão 4

O teorema fundamental da aritmética garante que todo número natural *n* > 1 pode ser escrito como um produto de números primos. Além disso, se $n = p_1^{t1} p_2^{t2} \ldots p_r^{tr}$, onde $p_1, p_2, \ldots p_r$ são números primos distintos, então o número de divisores positivos de *n* é $d(n) = (t_1 + 1)(t_2 + 1)\ldots(t_r + 1)$.

a) Calcule *d*(168), isto é, o número de divisores positivos de 168.
b) Encontre o menor número natural que tem exatamente 15 divisores positivos.

Resposta esperada

a) A fatoração de 168 como um produto de primos é $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Então, segundo a fórmula do enunciado, temos.

$$d(168) = (3 + 1)(1+1)(1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Resposta: d(168) = 16.
(2 pontos)

b) O número 15 admite duas decomposições como um produto de números naturais: $15 = 1 \cdot 15$ e $15 = 3 \cdot 5$. Portanto, o menor número natural n com 15 divisores terá a forma $n = p^{14}$ ou $n = p^2 \cdot q^4$, onde p e q são primos distintos. Tomando os menores números primos, que são 2 e 3, obteremos $n = 2^{14} = 16384$, ou $n = 2^2 \cdot 3^4 = 324$, ou $n = 2^4 \cdot 3^2 = 144$. O menor destes números é $n = 2^4 \cdot 3^2$.
Resposta: n = 144.
(3 pontos)

Exemplo acima da média

a) Fatoração de 168

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$168 = 2^3 . 3^1 . 7^1$

$d(168) = (3+1)(1+1)(1+1)$

$d(168) = 4.2.2 \Rightarrow \boxed{d(168) = 16 \text{ divisores}}$

b) $d(x) = 15$

$15 = 1.15 \Rightarrow d(x) = (0+1)(14+1) \Rightarrow x = 2^0 . 3^{14} \Rightarrow x = 3^{14}$

$15 = 3.5 \Rightarrow d(x) = (2+1)(4+1) \Rightarrow x = 2^2 . 3^4 \Rightarrow x = 324$

$15 = 5.3 \Rightarrow d(x) = (4+1)(2+1) \Rightarrow x = 2^4 . 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 144}$

$15 = 15.1 \Rightarrow d(x) = (14+1)(0+1) \Rightarrow x = 2^{14}\ 3^0 \Rightarrow x = 2^{14}$

O menor número natural é o 144

Exemplo abaixo da média

a)
$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$
$2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$d(168) = (3+1)(1+1)(1+1)$

$d(168) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{16}$

Tem 16 divisores positivos

b) $d(n) = (t_1+1)(t_2+1)\ldots(t_k+1) = 15$

$(2+1)(4+1) = 15$

$3 \cdot 5 = 15$

$2^3 \cdot 3^4 = \boxed{324}$

o número é 324

Comentários

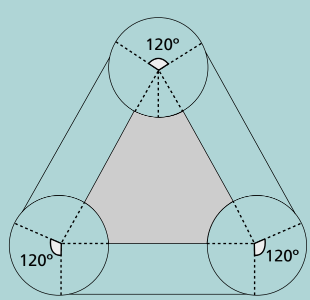
O objetivo desta questão foi avaliar o conhecimento de conceitos básicos da aritmética elementar, tais como números primos e divisores de um número.

Questão 5

Considere três circunferências em um plano, todas com o mesmo raio *r* = 2cm e cada uma delas com centro em um vértice de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 6cm. Seja C a curva fechada de comprimento mínimo que tangencia externamente as três circunferências.

a) Calcule a área da parte do triângulo que está fora das três circunferências.
b) Calcule o comprimento da curva C.

Resposta esperada



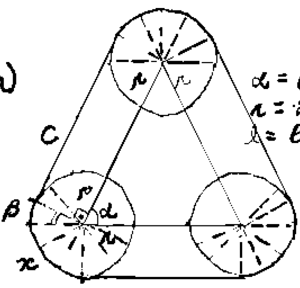
Resposta esperada

a) As circunferências estão ilustradas na figura acima. A área do triângulo que está fora das circunferências aparece destacada. Para determiná-la, é preciso descobrir a altura, h, a partir do comprimento do lado do triângulo, l, que vale 6 cm. Assim, observando que, para o triângulo retângulo de altura h e hipotenusa igual a l, temos $l^2 = h^2 + (1/2)^2$, chega-se a $h^2 = 36 - 9 = 27$, donde $h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Desta forma, a área do triângulo é igual a $A_T = l \cdot h / 2 = 6 \cdot 3\sqrt{3} / 2 = 9\sqrt{3}$.
A soma das regiões que são, ao mesmo tempo, internas ao triângulo e a cada uma das circunferências corresponde a um semicírculo de raio 2, cuja área é dada por $A_{SC} = \pi r^2 / 2 = \pi 2^2 / 2 = 2\pi$. A área pedida é a diferença entre A_T e A_{SC}.
Resposta: A área é igual a $9\sqrt{3} - 2\pi$ cm^2.
(4 pontos)

b) A curva fechada de comprimento mínimo que tangencia externamente as três circunferências também é mostrada na figura acima. O comprimento desta curva é igual à soma dos lados do triângulo aos três segmentos de circunferência. Como cada segmento está relacionado a um ângulo de 120°, a soma dos três fornece uma circunferência. Assim, o comprimento da curva é dado pela soma do perímetro de um triângulo de lado igual a 6 ao comprimento de uma circunferência de raio 2.
Resposta: $C = 3 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 2 = 18 + 4\pi$ cm.
(1 ponto)

Exemplo acima da média

a)



$\alpha = 60°$
$r = 2\,cm$
$l = 6\,cm$

$A = A_{T\Delta} - 3A_S$

$A_{T\Delta} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ cm^2$

$A_S = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi \cdot 4}{6} = \frac{2\pi}{3}\ cm^2$

$A = 9\sqrt{3} - \cancel{3}\cdot\frac{2\pi}{\cancel{3}} = 9\sqrt{3} - 2\pi\ cm^2$

R: A área corresponde a $(9\sqrt{3} - 2\pi)\ cm^2$

b) $\beta = 30°$ Comp $C = 3 \cdot 6cm + 3 \cdot x$

$l_{\odot} = 2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi\ cm \therefore x = \frac{l_{\odot}}{3} = \frac{4\pi}{3}\ cm$

Comp. $C = 3 \cdot 6 + \cancel{3} \cdot \frac{4\pi}{\cancel{3}} = 18 + 4\pi = 2(9 + 2\pi)\ cm$

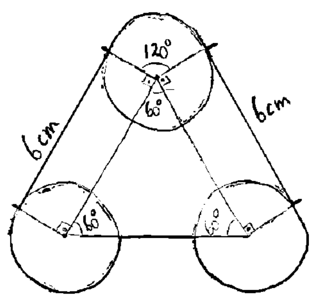
R: a curva C mede $2(9+2\pi)\ cm$

Exemplo abaixo da média

a) $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{6}$

$S = \frac{\cancel{36}^{9}\sqrt{3}}{\cancel{4}_{1}} - \frac{\pi \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}}$

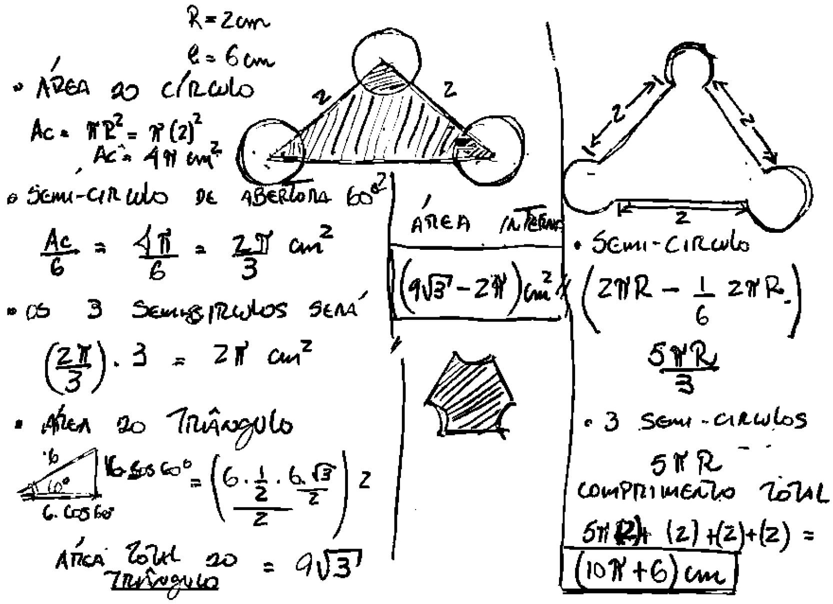
$\boxed{S = 9\sqrt{3} - 2\pi}$



b) $C = 2 \cdot 6 + \frac{2\pi \cdot 2}{3}$

$C = 4 \cdot \left(\frac{9 + \pi}{3}\right)$

Exemplo abaixo da média



Comentários

Esta questão tem por objetivo avaliar os conhecimentos de geometria plana do candidato. Para respondê-la, é preciso traçar um esboço da figura e dominar desde fórmulas simples de geometria, como as que são usadas no cálculo da área de um triângulo e de um setor circular e do comprimento de um arco de circunferência, até conceitos mais sutis, como a noção de reta tangente a uma circunferência. Muitos alunos usaram, desnecessariamente, aproximações para os valores de $\sqrt{3}$ e π. Um erro muito comum no item **a** foi o uso da fórmula do comprimento da circunferência, $C = 2\pi r$, em lugar da fórmula da área do círculo, $A = \pi r^2$.

A proposta original para essa questão mencionava uma correia girando em torno de 3 roldanas de mesmo raio, com centros nos vértices de um triângulo eqüilátero. Para evitar dificuldades de interpretação, por exemplo com a espessura da correia, a Banca optou pelo enunciado apresentado. Esperava-se que a expressão "curva fechada de comprimento mínimo que tangencia externamente as 3 circunferências" descrevesse a situação original, sem maiores dificuldades. Entretanto, como o enunciado da questão acabou gerando dúvidas, para não prejudicar os candidatos que entenderam de forma diferente da esperada pela Banca, foram consideradas satisfatórias outras interpretações. Assim, foram aceitas diversas soluções dessa questão ou até mesmo a indicação de que não existe a tal curva de comprimento mínimo. Anexamos as respostas de 3 candidatos, uma das quais corresponde exatamente ao que era esperado pela Banca ao passo que as outras duas apresentaram dificuldades de interpretação da proposta.

Questão 6

Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$5,00, o quilo da castanha de caju, R$20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R$16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima.
b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata

Resposta esperada

a) Sejam *x*, *y* e *z* as quantidades [em quilos] de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará, respectivamente. Temos, então, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 0,5 \\ 5x + 20y + 16z = 5,75 \\ y = (x + z)/3 \end{cases}$$

(3 pontos)

Resposta esperada

b) Substituindo o valor de y da terceira equação na primeira e na segunda, obtém-se o seguinte sistema linear de duas equações:

$$\begin{cases} 4x + 4z = 1,5 \\ 35x + 68z = 17,25 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema linear, obtém-se x = 0,25 e z = 0,125. Em seguida, encontra-se o valor y = 0,125 substituindo os valores de x e z na terceira equação mostrada no item **a**.

Resposta: 250g de amendoim, 125g de castanha de caju e 125g de castanha-do-pará.
(2 pontos)

Exemplo acima da média

x → quantidade de amendoim
y → quantidade de castanha de caju.
z → quantidade de castanha do pará

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 0,5 \\ 5x + 20y + 16z = 5,75 \\ y = \frac{x+z}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0,5 & \text{I} \\ 5x + 20y + 16z = 5,75 & \text{II} \\ x - 3y + z = 0 & \text{III} \end{cases}$$

b) III $x + z = 3y$

III em I

$3y + y = 0,5$

$\boxed{y = 0,125\ Kg}$

$y = 0,125 \cdot 10^3 g$

$\boxed{y = 125g}$

I $x + z = 0,5 - 0,125$

$\boxed{x = 0,375 - z}$ IV

IV em II

$5(0,375 - z) + 20 \cdot 0,125 + 16z = 5,75$

$1,875 - 5z + 2,5 + 16z = 5,75$

$z = 0,125\ Kg$

$\boxed{z = 125g}$

$x = 0,375 - 0,125$

$x = 0,250\ kg$

$\boxed{x = 250g}$

Exemplo abaixo da média

	cód.	R$	quantidade
amendoim		5,00	x
castanha caju		20,00	y
castanha pará	-	16,00	z
cada lata		5,75	500g

a)
$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5,75 & \text{I} \\ x + y + z = 500 & \text{II} \\ y = \frac{x+z}{3} & \text{III} \end{cases}$$

subst. III em II

$x + \frac{x+z}{3} + z = 500$

$\frac{3x + x + z + 3z}{3} = 500$

$\boxed{4x + 4z = 1500}$ IV

subst III em I

$5x + 20\left(\frac{x+z}{3}\right) + 16z = 5,75$

$5x + \frac{20x}{3} + \frac{20z}{3} + 16z = 5,75$

$\frac{35x}{3} + \frac{68z}{3} = 5,75$

$\boxed{35x + 68z = 17,25}$ V

$-68x - \cancel{68z} = -102000$

$35x + \cancel{68z} = 1500$

$-33x = -24000$

$x = \frac{24000}{33}$

$x \cong 727$

$y \cong$

$z \cong$

Comentários

Um dos objetivos dessa questão é a modelagem matemática de uma situação do cotidiano. A transcrição em linguagem matemática é representada por um sistema de equações lineares cuja solução não envolve nenhuma dificuldade.

Questão 7

O sistema de numeração na base 10 utiliza, normalmente, os dígitos de 0 a 9 para representar os números naturais, sendo que o zero não é aceito como o primeiro algarismo da esquerda. Pergunta-se:

a) Quantos são os números naturais de cinco algarismos formados por cinco dígitos diferentes?
b) Escolhendo-se ao acaso um desses números do item a, qual a probabilidade de que seus cinco algarismos estejam em ordem crescente?

Resposta esperada

a) Como o dígito zero não deve ser usado como primeiro algarismo de um número natural, temos 9 possibilidades para o primeiro algarismo, 9 possibilidades para o segundo, 8 possibilidades para o terceiro, 7 para o quarto e 6 para o quinto. Pelo princípio multiplicativo, podemos então formar $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$.
Resposta: Podem ser formados 27.216 números naturais com 5 algarismos diferentes.
(2 pontos)

b) Como os dígitos devem aparecer em ordem crescente, o zero não pode aparecer. Com os demais 9 dígitos, para formar números de 5 algarismos com os dígitos de cada um em ordem crescente, temos tantos desses números quantas são as escolhas de 5 dígitos distintos entre os 9 possíveis, ou seja $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$. A probabilidade de obter um desses números em uma escolha ao acaso entre os 27.216 do item **a** é, portanto, igual a $\frac{126}{27.216} = \frac{1}{216}$.

Resposta: A probabilidade pedida é de 1 / 216.
(3 pontos)

Exemplo acima da média

a) $\underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{6}{\_} \Rightarrow 9.9.8.7.6 = 27.216$ //

b) $\underset{1}{\_}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{C_{8,4}} = \frac{8!}{4!4!} = 70$

$\underset{2}{\_}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{C_{7,4}} = \frac{7!}{4!3!} = 35$

$\underset{3}{\_}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{C_{6,4}} = \frac{6!}{4!2!} = 15$

$\underset{4}{\_}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{C_{5,4}} = \frac{5!}{4!} = 5$

$\underset{5}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_} = 1$

$70 + 35 + 15 + 5 + 1 = 126$

$P = \frac{126}{27216} = \frac{63}{13.608}$ //

Exemplo abaixo da média

a) $\underset{9}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}$

$\boxed{n = 90000}$

b) $C_{9,5} = \frac{9!}{5!4!}$

$C = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$

$C = 3.2.7.3$ $\quad C = \frac{126}{90000}$ $\quad \boxed{P = \frac{126}{90000}}$ $\quad \boxed{P = \frac{21}{1000}}$

Comentários

Esta questão exige alguma habilidade para contagem de agrupamentos, formação de números e o conceito de probabilidade.

Questão 8

Considere, no plano xy, as retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$.

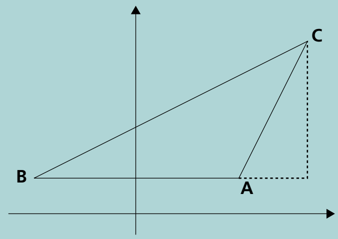
a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo ABC formado por essas retas?
b) Qual é a área do triângulo ABC ?

Resposta esperada

a) Seja A o ponto de interseção das retas y = 1 e y = 2x – 5. Então, as coordenadas (x,y) de A satisfazem o sistema

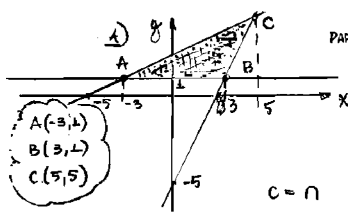
$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema, teremos 1 = 2x – 5 e 2x = 6, x = 3. Como y = 1, o ponto A tem coordenadas A(3,1). Analogamente, se B é o ponto de interseção das retas y = 1 e x – 2y + 5 = 0, teremos B(-3,1). Se C é a interseção de y = 2x – 5 e x – 2y + 5 = 0, então C(5,5).
Resposta: As coordenadas dos pontos são as seguintes: A(3, 1), B(-3, 1), C(5,5).
(3 pontos)



b) O lado AB do triangulo ABC é paralelo ao eixo x, e mede 6 unidades. A altura pelo vértice C mede 4 unidades. Logo a área do triangulo ABC é 6 · 4 / 2 = 12.
O cálculo da área do triangulo ABC pode ser feito também com o uso de determinante.
Resposta: A área do triangulo ABC é 12 u.a.
(2 pontos)

Exemplo acima da média



PARA y = 2x − 5
se x = 0 y = −5
x = 3 y = 1
PARA x − 2y + 5 = 0
se x = −5 y = 0
x = −3 y = 1

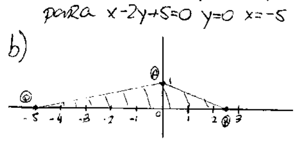
C = ∩ y = 2x − 5 ∩ x − 2y + 5 = 0
x − 2(2x − 5) + 5 = 0
−3x = −15 _ x = 5
y = 2x − 5 y = 5

B) ÁREA = A ~~ABC~~
$A = \frac{b.h}{2}$
$A = 6.\frac{(5-1)}{2}$ $A = 6.\frac{4}{\cancel{2}}$ A = 12 u²

Exemplo abaixo da média

a) para y = 1 x = 0 logo (0; 1)
para y = 2x−5 y = 0 x = 2,5 logo (2,5; 0)
para x−2y+5=0 y=0 x=−5 logo (−5; 0)

b)



$A = \frac{b.h}{2}$
$A = \frac{7,5 . 1}{2}$
A = 3,75

Resp. a área do triangulo é 3,75.
obs: o valor obtido não apresenta unidade pois não foi dado.

Comentários

A questão procura relacionar alguns conhecimentos básicos de álgebra e de geometria tais como equação de reta no plano, resolução de sistemas e área de triângulo.

Questão 9

As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \text{Log}_2 (4t + 4)$, onde a variável t representa o tempo em anos.

a) **Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes t = 1 e t = 7 ?**
b) **Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante t e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.**

Resposta esperada

a) Esse ítem pode ser respondido utilizando-se apenas três regras de logarítimos:
- $\log_b a = (\log_c a) / (\log_c b)$;
- $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$; e
- $\log_a a = 1$.

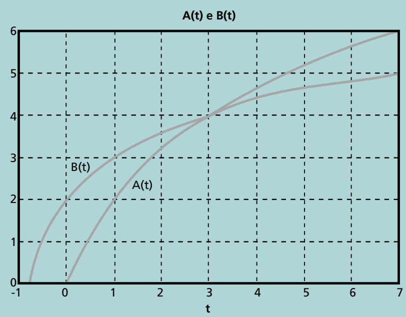
Assim, para calcular $A(1)$, fazemos $A(1) = \log_8 2^6 = 6 \cdot (1/3) \cdot \log_2 2 = 2$.

Da mesma forma, $A(7) = \log_8 8^6 = 6 \cdot \log_8 8 = 6$.

Para $B(1)$, fazemos $B(1) = \log_2(4 \cdot 1 + 4) = \log_2 2^3 = 3$.

Finalmente, obtemos, $B(7) = \log_2(4 \cdot 7 + 4) = \log_2 2^5 = 5$.

Resposta: A(1) = 2.000 habitantes, A(7) = 6.000 habitantes, B(1) = 3.000 habitantes e B(7) = 5.000 habitantes.
(3 pontos)



b) A figura acima, ainda que não exigida no enunciado, mostra a curva de crescimento das duas populações. Nela se observa que a população da cidade A será sempre maior que a de B a partir de um determinado instante t, o que também poderia ser deduzido pela análise dos valores obtidos no item **a**.
Para descobrir este instante, é preciso comparar as curvas das populações, o que exige que trabalhemos com uma mesma base para as duas funções A(t) e B(t). Convertendo a expressão de A(t) para a base 2, obtemos:

$A(t) = \log_8(1 + 7)^6 = 6 \cdot (1/3) \cdot \log_2(1 + t) = 2\log_2 (1 + t)$.

A função B(t) também pode ser ligeiramente simplificada usando a regra do logaritmo do produto, como exposto abaixo:
$B(t) = \log_2 [4(1 = t)] = \log_2 4 + \log_2 (1 + t) = 2 + \log_2 (1 + t)$.
O instante que desejamos descobrir é o ponto de interseção das duas curvas. Assim, fazendo A(t) = B(t), temos $2\log_2(1 + t) = 2 + \log_2 (1 + t)$, ou seja, $\log_2 (1 + t) = 2$, o que implica que $1 + t = 4$. Logo $t = 3$.
Resposta: t = 3 anos e A(t) $\geq$ B(t) para todo t $\geq$ 3 anos.
(2 pontos)

Exemplo acima da média

a) Em $t=1$:

Cidade A:
$A(1) = \log_8 2^6$
$A(1) = \log_8 8^2$
$A(1) = 2$

Cidade (B)
$B(1) = \log_2 8$
$B(1) = \log_2 2^3$
$B(1) = 3$

Em $t=7$:

Cidade A:
$A(7)\ \log_8 8^6$
$A(7) = 6$

Cidade B:
$B(7) = \log_2 32$
$B(7) = \log_2 2^5$
$B(7) = 5$

R: A população na cidade A é 2000 habitantes e em B é 3000 habitantes, no instante t=1. No instante t=7, a população em A é de 6000 habitantes e a de B é de 5000 habitantes.

b) $A(t) = B(t)$
$\frac{1}{3}\log_2(1+t)^6 = \log_2(4t+4)$
$\log_2(1+t)^2 - \log_2(4t+4) = 0$
$\log_2\left(\frac{(1+t)^2}{4(1+t)}\right) = 0$

$\log_2\left(\frac{1+t}{4}\right) = 0$
$2^0 = \frac{1+t}{4}$
$4 = 1+t$
$\boxed{t=3}$

R: A partir do instante 3, a cidade A passa a ter maior população que a cidade B.

Exemplo abaixo da média

a) cidade A : * $A(1) = \log_8 (2)^6$

$A = \log_8 64 \Rightarrow 8^A = 8^2 \Rightarrow A = 2$ 2 mil habit.

* $A(7) = \log_8 (8)^6 \Rightarrow 8^A = 8^6 \Rightarrow A = 6$ 6 mil habitantes

cidade B : * $B(1) = \log_2 (4+4)$ $B = \log_2 8$ $2^B = 2^3 \Rightarrow B = 3$ 3 mil hab.

* $B(7) = \log_2 (32)$ $B = \log_2 32$ $2^B = 2^5 \Rightarrow B = 5$ 5 mil habitantes

b) instante: $\log_2 (4t+4) = \log_8 (1+t)^6$

$2^{\log_8 (1+t)^6} = (4t+4)$

$2^{\log_8 (1+t)^6} = 4(t+1)$

Comentários

Esta é uma questão sobre logaritmos e suas propriedades. Deseja-se que o candidato seja capaz de manipular equações e de comparar os gráficos de funções logarítmicas com bases e expoentes diferentes.

Ao traçarmos o gráfico de funções logarítmicas com a mesma base, observamos que cresce mais rápido aquela que tem maior expoente, assim como, para funções com mesmo expoente, cresce mais rápido aquela que possui a menor base. Além disso, deve-se observar que a aplicação do logaritmo ao termo (t-1) corresponde, graficamente, a uma translação horizontal da função log(t). De forma semelhante, o gráfico da função $\log_2 (4t)$ é equivalente ao da função $\log_2 (t)$, se deslocado para cima em duas unidades.

Muitos candidatos esqueceram de indicar as unidades no item **a**.

Questão 10

Considere a equação trigonométrica $\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}2\,\theta = 0$.

a) Mostre que não são soluções dessa equação os valores de θ para os quais $\cos\theta = 0$.
b) Encontre todos os valores de $\cos\theta$ que são soluções da equação.

Resposta esperada

a) $\cos\theta = 0$ implica $\text{sen}\,\theta = 1$. Com base nessa afirmação, e substituindo $\text{sen}\,(2\theta) = 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$ na equação original, obtém-se:

$\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \text{sen}\theta\cos\theta = 1 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 \neq 0.$

Resposta: Observa-se que os valores de θ para os quais $\cos\theta = 0$ não são soluções da equação dada. (1 ponto)

b) Supondo $\cos\theta \neq 0$ e dividindo a equação por $\cos^2\theta$, obtém-se:

$\tan^2\theta + \tan\theta - 2 = 0.$

Fazendo $x = \tan\theta$, chegamos à equação $x^2 + x - 2 = 0$, cujas raízes são $x = 1$ e $x = -2$. Como $\cos\theta = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$, temos $\cos\theta = \pm\sqrt{2}/2$ e também $\cos\theta = \pm\sqrt{5}/5$

Resposta: Os valores de $\cos\theta$ que são soluções da equação dada são $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(4 pontos)

Exemplo acima da média

a) para $\cos\theta = 0$ $\theta = \pi/2, 3/2\pi$

para $\theta = \pi/2$: $\text{sen}^2\,\pi/2 - 2\cos^2\pi/2 + 1/2\,\text{sen}\,(2.\pi/2) = 0$

$1 - 0 + 1/2 \cdot 0 = 0$

$1 = 0$ Falso

para $\theta = 3/2\pi$ $\text{sen}^2\,3/2\pi - 2\cos^2 3/2\pi + 1/2\,\text{sen}\,(2 \cdot 3/2\pi) = 0$

$1 - 0 + 1/2(-1) = 0$

$1/2 = 0$ Falso

Exemplo acima da média

b) $sen^2\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\cdot 2sen\theta\cos\theta = 0$

$2\cos^2\theta - sen\theta\cos\theta - sen^2\theta = 0$

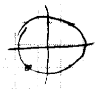
$(\cos\theta - sen\theta)(2\cos\theta + sen\theta) = 0$

$\begin{cases} \cos\theta = sen\theta \\ \cos\theta = -\frac{sen\theta}{2} \end{cases}$

$sen\theta = -2\cos\theta$

Pela relação fundam. $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$; $2\cos^2\theta = 1$; $\cos^2\theta = 1/2$; $\cos\theta = \pm\sqrt{2}/2$

$\begin{cases} \cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta + 4\cos^2\theta = 1 \\ 5\cos^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta = 1/5 \\ \cos\theta = \pm\sqrt{5}/5 \end{cases}$



valores para $\cos\theta$ são: $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

Exemplo abaixo da média

a) $sen^2\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}sen2\theta = 0$

$1 - \cos^2\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}2sen\theta\cos\theta = 0$

$1 - 3\cos^2\theta + sen\theta\cos\theta = 0$

$1 - 3.\cos\theta.\cos\theta + sen\theta\cos\theta = 0$

$se\ \cos\theta = 0$

$1 - 3.0.0 + sen\theta.0 = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (absurdo)

∴ valores de θ para os quais $\cos\theta = 0$ não são soluções dessa equação

b) $sen^2\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}sen2\theta = 0$

$1 - \cos^2\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\cdot 2sen\theta\cos\theta = 0$

$1 - 3\cos^2\theta + sen\theta\cos\theta = 0$

$1 - 3\cos^2\theta + (1 - \cos\theta)\cos\theta = 0$

$1 - 3\cos^2\theta + \cos\theta - \cos^2\theta = 0$

$-4\cos^2\theta + \cos\theta + 1 = 0\ (x-1)$

$4\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 16$

$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$

$\cos\theta_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$

$\cos\theta_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$

$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$sen\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

$sen\theta = 1 - \cos\theta$

Comentários

Esta é uma questão que permite avaliar bem o aluno com relação ao conteúdo de trigonometria. A maioria dos candidatos só resolveu o item **a** da questão. Na resolução da parte **b** houve um certo equilíbrio entre dividir a equação por $\cos^2\theta$, obtendo $\tan^2\theta + \tan\theta - 2 = 0$, e a resolução do trinômio do segundo grau em $\cos\theta$ ou $sen\theta$.

Questão 11

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 26$.

a) Verifique se o número complexo $2 + 3i$ é raiz desse polinômio.
b) Prove que $p(x) > 0$ para todo número real $x > -2$.

Resposta esperada

a) Basta substituir o número complexo 2+3i na expressão do polinômio para se obter:
$p(2 + 3i) = (2 + 3i)^3 - 2(2 + 3i)^2 + 5(2 + 3i) + 26 = 0$.
Resposta: Como p(2+3i) = 0 , o número complexo 2+3i é raiz do polinômio p(x).
(1 ponto)

b) Temos $p(-2) = 0$. Assim, $p(x)$ é divisível por $(x + 2)$ e $p(x) = (x^2 - 4x + 13).(x + 2)$. Como $q(x) = x^2 - 4x + 13$ não tem raiz real e o coeficiente de x^2 é positivo, segue-se que $q(x) > 0$ para todo x real. Para $x > -2$, temos $x + 2 > 0$ e, portanto, $p(x) = q(x)(x + 2) > 0$.
Resposta: Para todo x > –2, p(x) > 0.
(4 pontos)

Exemplo acima da média

a) $(2+3i)^3 - 2.(2+3i)^2 + 5.(2+3i) + 26 = 0$

$9i - 46 - (24i - 10) + 5.(2+3i) + 26 = 0$

$9i - 24i + 15i - 46 + 10 + 10 + 26 = 0$

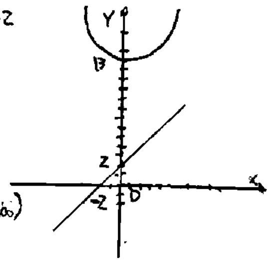
$0 = 0$. Portanto $2+3i$ é raiz.

b) Se $2+3i$ é raiz, $2-3i$ também é. Portanto a outra raiz é -2: $(2+3i)+(2-3i)+x''' = 2$ $x''' = -2$

$x^3 - 2x^2 + 5x + 26 \,\underline{|\, x+2}$

$\cancel{10}$ $\cancel{x^2 + 5}$ $x^2 - 4x + 13$

0



$(x^2 - 4x + 13).(x+2) > 0$

$x^2 - 4x + 13$ sempre é maior que 0 (gráfico)

$\therefore$ $x + 2 > 0$ $x > -2$

Exemplo abaixo da média

a) $p(2+3i) = (2+3i)^3 - 2(2+3i)^2 + 5(2+3i) + 26$

$p(2+3i) = (4+12i-9)(2+3i) - 2(-5+12i) + 10 + 15i + 26$

$p(2+3i) = -10 + 24i - 15i - 36 + 10 - 24i + 36 + 15i$

$p(2+3i) = 0$

$\boxed{\therefore\ 2+3i \text{ é raiz do polinômio}}$

b) $p(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) + 26$

$p(-2) = -8 - 8 - 10 + 26$

$p(-2) = 0$

$p(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 5(-1) + 26$

$p(-1) = -1 - 2 - 5 + 26$

$p(-1) = 26 > 0$

$p(0) = 0^3 - 2.0^2 + 5.0 + 26$

$p(0) = 26 > 0$

Comentários

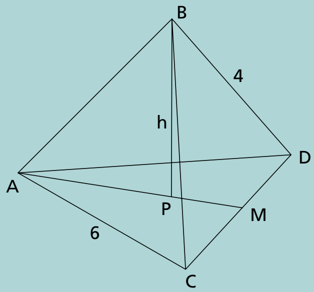
Esta questão exige familiaridade com as operações elementares com números complexos, o conceito de raiz, fatoração e análise do sinal de um polinômio.

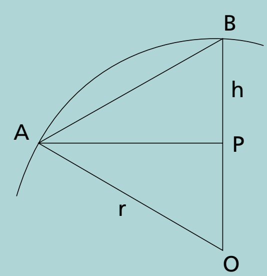
Questão 12

A base de uma pirâmide é um triângulo eqüilátero de lado L = 6cm e arestas laterais das faces *A* = 4cm.

a) Calcule a altura da pirâmide.
b) Qual é o raio da esfera circunscrita à pirâmide?

Resposta esperada





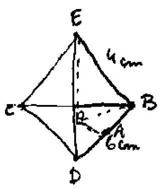
Resposta esperada

a) Na primeira figura acima, seja M o ponto médio do lado CD. Então, para a altura AM do triangulo eqüilátero ACD com lado 6, temos $\overline{AM}^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, donde $\overline{AM} = 3\sqrt{3}$. Se P é o pé da perpendicular do vértice B para a base, então P pertence a AM. Observamos que P é o centro do triangulo eqüilátero pois $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{DB}$ e as projeções ortogonais destes segmentos também são iguais. Assim, BP é a altura da pirâmide. Então, $\overline{AP} = (2/3) \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. O triangulo APM é retângulo, então $h^2 = \overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AP}^2 = 16 - 122 = 4$. Logo, h = 2.
Resposta: A altura h mede 2 unidades.
(3 pontos)

b) Seja O o centro da esfera. Na segunda figura, temos $\overline{OA} = \overline{OB} = r$. Observe que o centro O pertence à reta BP. Então, $(r - h)^2 + (2\sqrt{3})^2 = r^2$. Resolvendo esta equação, obtém-se r = 4.
Resposta: O raio r da esfera mede 4 unidades.
(2 pontos)

Exemplo acima da média

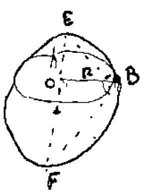
a)



$\ell = R\sqrt{3}$
$6 = R\sqrt{3}$
$R = 2\sqrt{3}$ cm

Pelo triângulo OBE:
$h^2 + \overline{OB}^2 = \overline{EB}^2$
$h^2 = 16 - 12$
$h = \sqrt{4} \rightarrow \boxed{h = 2 \text{ cm}}$

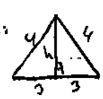
b)



Pelo triângulo retângulo. Δ EBF, temos
$h^2 = m \cdot n$ $m + n =$ diâmetro
$(2\sqrt{3})^2 = 2 \cdot m$ $6 + 2 =$ diâmetro
$m = 6$ cm $d = 8$
$r = \frac{d}{2} = \boxed{4 \text{ cm}}$

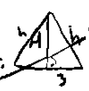
Exemplo abaixo da média

a) Vista lateral:



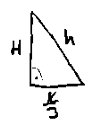
$h^2 + 9 = 16$
$h^2 = 7$

~~Internamente:~~



~~$H^2 + 9 =$~~

Internamente:



onde x é altura no Δ equilátero (base.

$3^2 + x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 27$ e $H^2 + \frac{x^2}{9} = h^2 = 7 = H^2 + \frac{27}{9} = H^2 + 3 = 7 \Rightarrow H^2 = 4$
$\Rightarrow H = 2$cm.

Comentários

Esta questão é rotineira na geometria no espaço. Além de uso apropriado do teorema de Pitágoras, uma visão espacial é indispensável para sua resolução.