Caderno de Questões 2003

2ª Fase

Matemática

UNICAMP

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES

Introdução

A prova de matemática da segunda fase é constituída de 12 questões, geralmente apresentadas em ordem crescente de dificuldade. As primeiras questões procuram avaliar habilidades e conteúdos normalmente presentes nas primeiras séries do Ensino Fundamental, especialmente leitura e compreensão de enunciados, raciocínio lógico e operações elementares. As questões intermediárias estão relacionadas às últimas séries do Ensino Fundamental e envolvem problemas de geometria elementar, aritmética e contagem. As últimas questões pretendem avaliar os conteúdos usuais do Ensino Médio. Propõem problemas mais elaborados e que exigem raciocínios mais sofisticados e o domínio de técnicas e conteúdos específicos. Um bom conhecimento das funções elementares, que são as funções estudadas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, e de seus gráficos tem sido decisivo para o sucesso dos candidatos na prova de matemática. Uma deficiência na formação dos candidatos, que temos observado regularmente, refere-se ao tema "polinômios e suas raízes", em particular: raízes complexas, multiplicidade de raízes, fatoração de polinômios a partir das raízes e das relações de Girard [que são as relações entre coeficientes e raízes de um polinômio].

ATENÇÃO: Escreva a resolução COMPLETA de cada questão no espaço a ela reservado.
Não basta escrever o resultado final: é necessário mostrar os cálculos ou o raciocínio utilizado.

Questão 1

Uma pessoa possui a quantia de R$7.560,00 para comprar um terreno, cujo preço é de R$15,00 por metro quadrado. Considerando que os custos para obter a documentação do imóvel oneram o comprador em 5% do preço do terreno, pergunta-se:

a) Qual é o custo final de cada m^2 do terreno?
b) Qual é a área máxima que a pessoa pode adquirir com o dinheiro que ela possui?

Resposta esperada

a)
15,00 x 1,05 = 15,75
Resposta: O custo final de cada m^2 do terreno é de R$15,75.
(2 pontos)

b)
7.560,00: 15,75 = 480
Resposta: A área máxima que a pessoa pode comprar é de 480m^2.
(3 pontos)

Exemplo acima da média

a) 15 reais — 100%
x — 5%
$x = \frac{75}{100} = 0{,}75$

C = 15,00 + 0,75
C = 15,75 reais pada m^2
Resp

b) Área = 7.560,00 ÷ 15,75
Área = 480 m^2

7560,00 | 15,75
12600 480
00
0

∴ A área máxima que a pessoa pode adquirir com o dinheiro que ela possui é 480 m^2//.

Exemplo abaixo da média

a) preço do terreno R\$ 7560,00
se cada m² é R\$15,00, então a área do terreno:
$7560 \div 15 = 504\ m^2$

5% de 7560 é 7182
7182 divide pela área ($504 m^2$) é o preço do m^2: $\boxed{R\$\,14,25}$

b) a área máxima é de $\boxed{504 m^2}$
↳ 7560 divide pelo preço do m^2 (R\$15,00)

Comentários

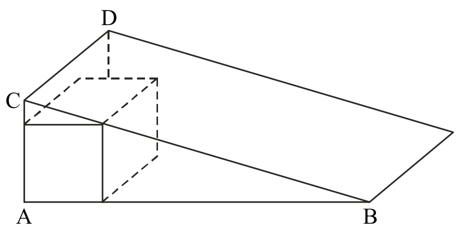
Questão muito fácil, envolvendo conceitos como porcentagem, interpretação de problemas matemáticos do cotidiano e aritmética elementar com números decimais. A maioria dos candidatos tentou resolver a questão, mas muitos cometeram algum erro na operação de divisão do item **b**. Também foram freqüentes os erros nas unidades. Finalmente, há candidatos que supõem, erradamente, que as equações 7560 = x.1,05 e x = 7560.0,95 são equivalentes, como ilustra o exemplo de nota abaixo da média apresentado acima.

Questão 2

Uma caixa d'água **cúbica**, de volume máximo, deve ser colocada entre o telhado e a laje de uma casa, conforme mostra a figura ao lado.

Dados:

$\overline{AB} = 6m \quad \overline{AC} = 1{,}5m \quad \overline{CD} = 4m$



a) Qual deve ser o comprimento de uma aresta da caixa?
b) Supondo que a altura máxima da água na caixa é de 85% da altura da caixa, quantos litros de água podem ser armazenados na caixa?

Resposta esperada

a)

$\frac{1{,}5}{x} = \frac{6}{6-x}$, portanto : $x = 1{,}2m$

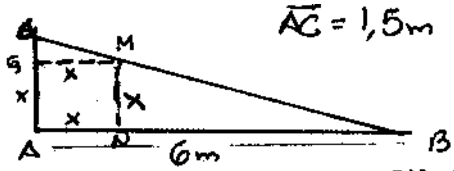
(3 pontos)

b)

$V = 0{,}85 \times 12 \times 12 \times 12 = 1.468{,}8$ litros.

(2 pontos)

Exemplo acima da média



$\overline{AC} = 1,5m$ $\quad \overline{DC} = 4m$

$\Delta GCM \sim \Delta NMB$

$$\frac{6-x}{x} = \frac{x}{1,5-x} \quad (x < 4)$$

$x = 1,2\ m$

a) O comprimento da aresta deve ser $\boxed{1,2\ m}$

b)

$1,2 \cdot 0,85 = 1,02\ m$

$1,02 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,4688\ m^3$

$1m^3 = 1000L \therefore C = 1468,8\ L$

R: Podem ser armazenados $\boxed{1468,8\ L}$

Exemplo abaixo da média

a) $\frac{x-1,5}{1,5} = \frac{x}{6}$ $\qquad \boxed{x = 2}$

$6x - 9 = 1,5x$

$4,5x = 9$

b) 2 —— 100%

x —— 85%

$\boxed{x = 17 \text{ litros}}$

Comentários

Esta questão serviu para avaliar desde conhecimentos básicos de aritmética e cálculo com decimais até conceitos de geometria plana e espacial. Observou-se um alto índice de erros em contas e na conversão de metros cúbicos para litros. Além disso, conceitos básicos de geometria, como semelhança de triângulos, por exemplo, ainda são considerados difíceis por muitos candidatos, que deixam em branco questões simples como esta.
No exemplo de resolução com nota abaixo da média exibido acima, observam-se erros grosseiros, como a substituição de $(1,5 - x)$ por $(x - 1,5)$, o cálculo do volume pela simples multiplicação do comprimento da aresta por 0,85 e a conversão errada de unidades.

Questão 3

Suponha que uma tabela (incompleta) para o cálculo do imposto de renda fosse a seguinte:

Renda em reais	%	Parcela a deduzir em reais
$\leq$ 1.000	isento	0
1.000 a 2.000	15	150
2.000 a 3.000	20	
$\geq$ 3.000		475

OBS. O imposto é calculado aplicando-se à renda a porcentagem correspondente e subtraindo-se desse resultado a parcela a deduzir.

a) Calcule os valores dos impostos a serem pagos por dois contribuintes cujas rendas são de R$1.000,00 e de R$2.000,00.
b) Escreva a tabela acima no caderno de respostas, completando-a com a parcela a deduzir para a faixa de R$2.000,00 a R$3.000,00 e com a alíquota que corresponde à faixa de renda superior a R$3.000,00.

Resposta esperada

a) R$1.000,00 isento [imposto zero].

R$2.000,00 × 0,15 = R$300,00
R$300,00 - R$150,00 = R$150,00
(2 pontos)

b)
R$2.000,00 x 0,20 = R$400,00

R$400,00 – parcela a deduzir = R$150,00 [imposto calculado em (a)].
Logo, para esta faixa, a parcela a deduzir é de R$250,00.
R$3.000,00 x 0,20- R$250,00 = R$350,00 [imposto correspondente a R$3.000,00]

Logo 3.000 x i - 475 = 350 e, portanto, $i = \dfrac{825}{3000} = 0,275 = 27,5\%$

(3 pontos)

Exemplo acima da média

a) contribuinte com renda de R$1000,00:

$V_1 = 1000(0,15) - 150 \Rightarrow V_1 = 150 - 150 \Rightarrow \boxed{V_1 = 0}$

contribuinte com renda de R$2000,00:

$V_2 = 2000(0,15) - 150 \Rightarrow V_2 = 300 - 150 \Rightarrow \boxed{V_2 = R\$\ 150,00}$

b)

Renda em reais	%	Parcela a deduzir em reais
≤ 1000	isento	0
1000 a 2000	15	150
2000 a 3000	20	x
≥ 3000	y	475

cálculo de x: V_{PAGO} = R$ 150,00

$150 = 2000(0,20) - x \Rightarrow x = 400 - 150 \Rightarrow \boxed{x = 250}$

cálculo de y: $3000(0,20) - 250 = 3000(y) - 475$

$\Rightarrow 3000y = 600 - 250 + 475 \Rightarrow y = 0,275 \Rightarrow \boxed{y = 27,5\%}$

Exemplo abaixo da média

a, O que tem renda de R$ 1.000,00 é isento dos impostos.

O de R$ 2.000,00 → $\frac{15}{100}$ de 2000 + 150,00 = 450,00 de imposto reais

b,

renda em reais	%	Parcela a deduzir
$\leq$ 1.000	isento	0
1.000 a 2.000	15	150
2.000 a 3.000	20	300
$\geq$ 3.000	31,6	475

→ $2000 \cdot \frac{15}{100} = \frac{300}{2} = 150$

Da mesma forma,

$3000 \cdot \frac{20}{100} = \frac{600}{2} = 300$

20 — 300
x — 475

$x = \frac{9500}{300} = 31,6$

Comentários

A questão é fácil pois o conteúdo matemático exigido é do nível fundamental. Além de fácil é uma questão concreta do tipo que os candidatos encontram no seu dia a dia. Apesar disso foram detectados erros devidos ao desconhecimento do significado de palavras como dedução e isenção. Este tipo de questão é também importante para mostrar o quanto é necessária uma análise dos resultados. Muitos candidatos encontraram o valor do imposto a pagar maior que a renda.

Questão 4

Sejam *a* e *b* dois números inteiros positivos tais que *mdc(a,b) = 5 e o mmc(a,b) = 105*.

a) Qual é o valor de *b* se *a* = 35?
b) Encontre todos os valores possíveis para (a,b).

Resposta esperada

Se *a* e *b* são números inteiros positivos, então *mdc(a,b).mmc(a,b) = a.b*
Deste modo, *a.b* = 525.

a) Se *a* = 35, então $b = \frac{525}{35} = 15$.

(2 pontos)

b) Sendo *mdc(a,b) = 5*, então *a* e *b* são múltiplos de 5, isto é, *a* = 5*x* e *b* = 5*y*.

Logo, *a.b* = 5*x*.5*y* = 25*xy* = 525 ou $xy = \frac{525}{25} = 21$

Sendo *xy* = 21, os valores possíveis para *x* e *y* são: (1, 21), (3, 7), (7, 3) e (21, 1).
Portanto, os valores possíveis para (*a*, *b*) são: (5, 105), (15, 35), (35, 15) e (105, 5).

(3 pontos)

Exemplo acima da média

mmc(a,b) = 3·5·7 e mdc(a,b) = 5

a) a = 35 = 5·7

O mmc é formado pelos números iguais e diferentes de maior expoente, enquanto o mdc é composto pelos números iguais de menor expoente de cada algarismo analisado. assim: b = 5·3 ⇒ $\boxed{b = 15}$

b) a = 5·3·7 ⇒ a = 105 ou a = 5 ⇒ a = 5
b = 5 ⇒ b = 5 b = 5·3·7 ⇒ b = 105

ou a = 5·3 ⇒ a = 15 ou a = 5·7 = 35
b = 5·7 ⇒ b = 35 b = 5·3 = 15

Resp.: a) b = 15
b) a = 105 e b = 5 ou a = 5 e b = 105 ou a = 15 e b = 35
ou a = 35 e b = 15

Exemplo abaixo da média

a) a = 35 $\quad 105 : 35 = 3$

O mínimo multiplo comum entre 35 e 3 é 105

Resp.: b = 3

b)

105	3
35	5
7	7
1	3.5.7

$105 : \underline{3} = \underline{35}$

$105 : \underline{5} = \underline{21}$

$105 : \underline{7} = \underline{15}$

Resp.: Os possíveis valores de a e b são: 3 e 35, 5 e 21, e 7 e 15.

Comentários

Questão simples cujo conteúdo envolve conhecimento de quinta série. Poucos candidatos resolveram a questão pela solução esperada. Houve uma grande divergência nas soluções apresentadas. Apesar de ser uma questão com conteúdo matemático simples, uma grande porcentagem de candidatos mostrou total desconhecimento do assunto. O enunciado puramente técnico pode ter cooperado para este resultado. Algum contexto em questões iniciais pode facilitar o raciocínio e encorajar os candidatos a resolver o problema.

Questão 5

Os pontos A e B estão, ambos, localizados na superfície terrestre a 60º de latitude norte; o ponto A a está 15º45′ de longitude leste e o ponto B a 56º15′ de longitude oeste.

a) Dado que o raio da Terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6.400 km qual é o raio do paralelo de 60º?
b) Qual é a menor distância entre os pontos A e B, medida ao longo do paralelo de 60º? [Use 22/7 como aproximação para ð]

Resposta esperada

a) R = 6.400 km $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{r}{6.400}$

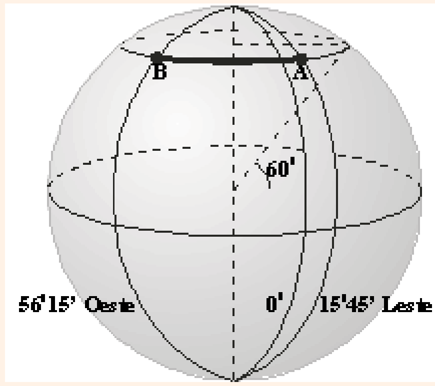
Portanto, r = 3.200 km .

(2 pontos)

b) $15°45' + 56°15' = 72°$

Como 72º corresponde a 1/5 da circunferência cujo raio é de 3.200 km, temos:

$$m(AB) = \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot 3200 = 1280\pi \approx 4022 \quad km$$



(3 pontos)

Exemplo acima da média

A)

$\cos 60° = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$

$\frac{r}{6400} = \frac{1}{2}$

$\boxed{r = 3200 Km}$

B) $15°45' + 56°15' = 72°0'$

$C = 2\pi r = 6400\pi$

$\frac{6400\pi}{x} = \frac{360°}{72°}$

$x = \frac{\cancel{6400\pi}^{1280\pi}}{\cancel{8}1} = 1280 \cdot \frac{22}{7} = \frac{28160}{7} \cong 4022,8 Km$

A DISTÂNCIA É DE, APROXIMADAMENTE, $\boxed{4022,8 Km}$

Exemplo abaixo da média

a-) Se a Terra é considerada perfeitamente esférica, logo o raio do paralelo 60° é igual a 6 400 km.

Comentários

Esta questão tinha como propósito avaliar o conhecimento básico dos vestibulandos sobre geometria, trigonometria, bem como verificar se tinham uma certa visão espacial, ainda que elementar. Quanto à dificuldade, classificaríamos a questão como média – fácil. Na resolução do item **a** não houve variações significativas em relação à solução proposta pela banca. O mesmo vale para o item **b**; ressaltamos que houve candidatos que mostraram criatividade e conseguiram simplificar parte dos cálculos do raio no item **b**. Os erros mais típicos são apontados a seguir. Vários candidatos cometeram erros nas computações, especialmente ao simplificar expressões; freqüentemente as respostas foram arredondadas incorretamente. Outros candidatos deixaram de incluir todas as contas e os raciocínios, o que levou a menor pontuação.

Questão 6

As equações $(x+1)^2 + y^2 = 1$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$ representam duas circunferências cujos centros estão sobre o eixo das abscissas.

a) Encontre, se existirem, os pontos de intersecção daquelas circunferências.
b) Encontre o valor de $a \in R$, $a \neq 0$,de modo que duas retas que passam pelo ponto $(a, 0)$ sejam **tangentes às duas circunferências**.

Resposta esperada

a) A primeira circunferência tem centro $C_1(-1,0)$ e raio 1 e a segunda $C_2(2,0)$ e raio 2.
O único ponto do plano que pertence a essas duas circunferências é o ponto (0,0).
(3 pontos)

(b) Os triângulos AT_1C_1 e AT_2C_2 são semelhantes.

Logo: $\frac{2}{1} = \frac{2-a}{-1-a}$, de onde se obtém a = -4 .

(2 pontos)

Exemplo acima da média

a) $\left|\begin{array}{l} r: (x+1)^2+y^2=1 \Rightarrow y^2 = 1-(x+1)^2 \Rightarrow y_r = \sqrt{1-(x+1)^2} \\ s: (x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow y^2 = 4-(x-2)^2 \Rightarrow y_s = \sqrt{4-(x-2)^2} \end{array}\right.$

Para haver intersecção, $y_r = y_s \Rightarrow \sqrt{1-(x+1)^2} = \sqrt{4-(x-2)^2} \Rightarrow$

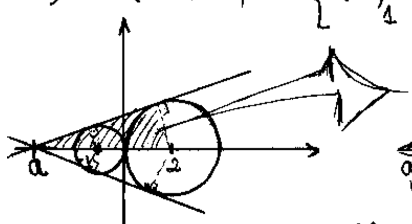
$\Rightarrow 1-(x^2+2x+1) = 4-(x^2-4x+4) \Rightarrow 1-x^2-2x-1 = 4-x^2+4x-4 \Rightarrow$

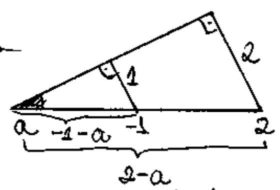
$\Rightarrow -2x = 4x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

Para $x=0 \Rightarrow y = \sqrt{1-(0+1)^2} \Rightarrow \boxed{y=0}$

O único ponto de intersecção é: $\boxed{P(0,0)}$

b) $r: (x+1)^2+y^2=1 \left\{\begin{array}{l}(-1,0) \text{ Centro} \\ 1 \text{ Raio}\end{array}\right.$ $s: (x-2)^2+y^2=4 \left\{\begin{array}{l}(2,0) \text{ Centro} \\ 2 \text{ Raio}\end{array}\right.$

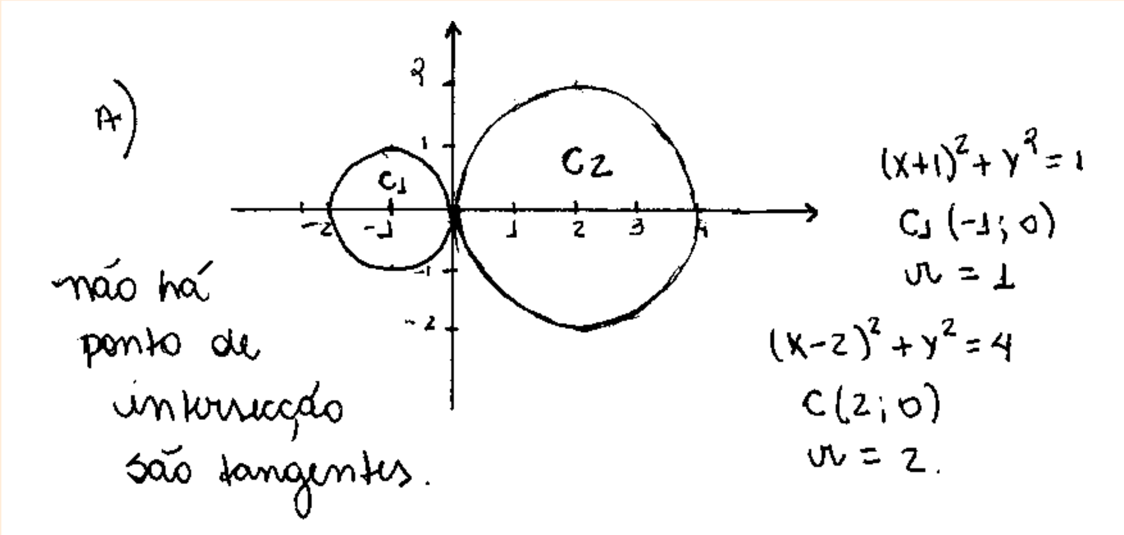




Por semelhança, caso AA, temos:

$\frac{2}{2-a} = \frac{1}{-1-a} \Rightarrow -2-2a = 2-a \Rightarrow \boxed{a=-4}$

Exemplo abaixo da média



Comentários

A questão admite uma solução bastante simples. Vários candidatos resolveram a questão graficamente. A solução gráfica também era considerada correta desde que justificada. Os principais erros cometidos pelos vestibulandos foram os seguintes: representação gráfica errada, com solução algébrica correta, ou vice-versa; colocar os pontos T_1 e T_2 em cima dos centros das circunferências respectivas (Ressaltamos que, com tal erro, para o ponto *A* obtém-se o valor correto.); erros na apresentação do ponto *A* sem levar em conta a sua posição em relação aos centros das circunferências; representação errada (ou falta de representação) da semelhança dos triângulos respectivos. Como um todo, a questão foi considerada de dificuldade média.

Questão 7

Considere o conjunto $S = \{ \ n \in N : 20 \leq n \leq 500 \ \}$.

a) Quantos elementos de *S* são múltiplos de 3 **e** de 7?
b) Escolhendo-se ao acaso um elemento de *S*, qual a probabilidade de o mesmo ser um múltiplo de 3 **ou** de 7?

Resposta esperada

a)
M(3) = {21, 24 ..., 498}, de modo que *M*(3) = 160
M(7) = {21, 28 ..., 497}, de modo que *M*(7) = 69
M(21) = {21, 42 ..., 483}, de modo que *M*(21) = 23

Resposta: São 23 os múltiplos de **3 e 7**.
(3 pontos)

Comentários

(b)
M (3 ou 7) = M(3) + M(7) - M (3 e 7) = 206

Logo, $p = \dfrac{206}{481} \approx 0,428 = 42.8\%$. Considerar correto se parar na fração certa.

(2 pontos)

Exemplo acima da média

a) para ser múltiplo de 3 e de 7 precisa ser múltiplos de 21.
Para descobrir quantos múltiplos de 21 existe entre 20 e 500, podemos montar uma PA. (21, ..., 483) de razão 21.

$a_1 = 21$; $a_n = 483$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)r$

$483 = 21 + (n-1)21$

$462 = (n-1)21 \rightarrow \dfrac{462}{21} = n - 1 \quad n = 22 + 1 \quad \boxed{n = 23}$

∴ 23 elementos de S são multiplos de 3 e de 7.

b) $\underbrace{n(E)}_{\text{número de elementos de S}} = 500 - 19 = 481$ $\quad$ A → múltiplos de 3 ou de 7.

Como foi feito no item a):

p/ os mult. de 3 → PA.(21, ..., 498) $r = 3$ $\quad 498 = 21 + (n'-1)3$ $\quad 159 + 1 = n' = 160$

p/ os mult. de 7 → P.A (21, ..., 497) $r = 7$ $\quad 497 = 21 + (n''-1)7$ $\quad 68 + 1 = n'' = 69$

$n(A) = 160 + 69 - 23 = 206$

$P(A) = \dfrac{206}{481}$

Exemplo abaixo da média

(a) $P_a (21, 24, \ldots, 498)$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$498 = 21 + (n-1)3$ $\qquad 480 = 3n$

$477 = 3n - 3$ $\qquad n = 160$

$P_a (21, 28, \ldots, 147)$

$147 = 21 + (n-1)7$

$126 = 7n - 7$ $\qquad n = 19$

$7n = 133$

a/ $P_a (21, 42, \ldots, 147)$

$147 = 21 + (n-1)21$ $\qquad n = 7$

$126 = 21n - 21$

$147 = 21n$

São multiplos de 3 e de 7, 7 elementos de S

b/ $P = \frac{160}{480} + \frac{19}{480} \Rightarrow \frac{179}{480}$

A probabilidade de ser multiplo de 3 ou de 7 sera $179/480$.

Comentários

O nível de dificuldade desta questão foi considerado mediano pela banca. O enunciado da questão é simples e direto. Qualquer candidato com um mínimo de maturidade matemática poderia resolvê-la integralmente sem o auxílio de qualquer método sofisticado. A resposta esperada envolve métodos elementares de P.A., aritmética e probabilidade. A solução apresentada pela banca é a melhor opção. Entretanto, um candidato com uma certa maturidade e sem o conhecimento das matérias anteriormente citadas poderia resolver a questão intuitivamente (principalmente a parte (a)) através de prospecção de dados e aritmética empírica (divisibilidade). Deste modo, qualquer erro de cálculo redundaria em erros fantásticos. Ressalte-se, ainda, que a banca, em sua resolução padrão, utilizou as fórmulas fundamentais da probabilidade e da união/intersecção de conjuntos. Neste ponto reside o maior grau de dificuldade da questão principalmente para aqueles que desconhecem essas fórmulas. Mesmo assim, o candidato poderia, segundo a grade estipulada, conseguir uma nota acima da média somente com os resultados da primeira parte.

Questão 8

Considere dois triângulos retângulos T_1 e T_2, cada um deles com sua hipotenusa medindo 1*cm*. Seja α a medida de um dos ângulos agudos de T_1 e 2α a medida de um dos ângulos agudos de T_2.

a) Calcule a área de T_2 para $\alpha = 22{,}5°$.

b) Para que valores α de a a área de T_1 é menor que a área de T_2?

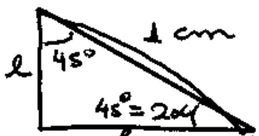
Resposta esperada

a)
Para α= 22,5º, 2α = 45º. Logo, T_2 é isósceles. Assim sendo, a área de T_2 é igual à metade da área do quadrado cuja diagonal mede 1*cm*, ou seja, $A(T_2) = \frac{1}{4} cm^2$.
(1 ponto)

b)
Para cada á, $A(T_1) = \frac{1}{2}\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)$ e $A(T_2) = \frac{1}{2}\cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\alpha)$.
Deve-se, então, encontrar os valores de á para os quais $\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) < \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\alpha)$
Como $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ e 0 < á < ð/2, esta última desigualdade é equivalente a $2\cos(2\alpha) > 1$, ou ainda $\cos(2\alpha) > 1/2$.
Como também $0 < 2\alpha < \pi/2$, segue-se que $2\alpha < \pi/3$ e, portanto, $\alpha < \pi/6 = 30°$.
Resposta : 0 < α < 30º
(4 pontos)

Exemplo acima da média

a) T_2

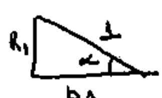


se α = 22,5°
2α = 45°

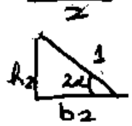
como os ângulos agudos medem 45°, podemos considerar o triângulo T_2 como metade de um quadrado de lado l, sendo a hipotenusa igual à diagonal deste quadrado → $d = l\sqrt{2} = 1$ ∴ $l = \sqrt{2}/2$

$$A_{T_2} = \frac{b.h}{2} = \frac{l^2}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad \boxed{A_{T_2} = \frac{1}{4} cm^2}$$

b) T_1



T_2



sen 2α = h_2
cos 2α = b_2

sen α = h_1; cos α = b_1

$A_{T_1} = \frac{b_1 h_1}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cos\alpha}{2}$

$2A_{T_1} = \frac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{2}$

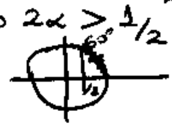
$A_{T_1} = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{4}$ //

$A_{T_2} = \frac{b_2 h_2}{2} = \frac{\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha}{2}$ //

• p/ $A_{T_1} < A_{T_2}$

$\frac{\cancel{\text{sen}\,2\alpha}}{\cancel{4}\,2} < \frac{\cancel{\text{sen}\,2\alpha}\cos 2\alpha}{\cancel{2}}$

$\cos 2\alpha > 1/2$



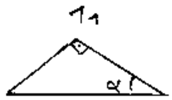
$2\alpha < 60°$

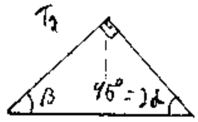
$\boxed{\alpha < 30°}$

Para α menor que 30°.

Exemplo abaixo da média

a)



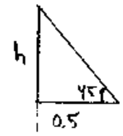


$2 \cdot 22,5 = 45°$

$T_2 \Rightarrow 90° + 45° + \beta = 180$

$\beta = 45°$

Então T_2 é isósceles



$tg\ 45° = \dfrac{h}{0,5}$ $\quad 1 = \dfrac{h}{0,5}$ $\quad h = 0,5\ cm$

$A_{\Delta T_1} = \dfrac{b \cdot h}{2} =$

$A_{\Delta T_1} = \dfrac{1 \cdot 0,5}{2} = \dfrac{0,5}{2} = 0,25\ cm^2$ A área de T_1 é $0,25\ cm^2$.

b) A área de T_1 sempre será menor que a de T_2, porque a altura de T_2 sempre será maior que a de T_1; considerando que os Triângulos seja retangulos e α sempre positivo.

Comentários

Esta questão conecta conceitos de geometria plana (área de um triângulo) com trigonometria (funções trigonométricas). O nível de dificuldade desta questão foi considerado mediano pela banca. A questão está enunciada de uma forma direta e segue uma linha tradicional de problemas encontrados em textos usados em colégios. A chave da questão (parte a) é deduzir (direta ou indiretamente) que o triângulo T_2 é isósceles. Até este ponto, não vemos outras alternativas reais de solução. Na segunda parte, é imperativa a montagem de uma desigualdade tendo α (ângulo do triângulo T_1) como sua incógnita. Deduz-se então uma desigualdade simplificada equivalente à original. Neste ponto poderemos obter variações da nova forma da desigualdade obtida, ou seja, diferentes simplificações dependendo do caminho escolhido. Obviamente, através de qualquer forma encontrada chega-se diretamente à resposta. A questão coloca-se dentro de um padrão tradicional e sua inserção no exame não desperta surpresa.

Na resposta considerada abaixo da média, o candidato agiu corretamente na parte (a). Na parte (b), "deduziu" através de argumentos discursivos e não matemáticos que a resposta não dependia do parâmetro; portanto, resposta errada. Assim, a sua pontuação na questão foi 1.

Questão 9

O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de $-18°C$. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu $0°C$ após 90 minutos e chegou a $-16°C$ após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)°C$ superior à temperatura ambiente.

Resposta esperada

$T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$ e é dado que $T_A = -18°C$.

a)

$T(90) = -18 + \alpha 3^{\beta \cdot 90} = 0$, de onde $\alpha 3^{90\beta} = 18$.

$T(270) = -18 + \alpha 3^{270\beta} = -16$ ou $\alpha 3^{270\beta} = 2$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtém-se: $\frac{3^{270\beta}}{3^{90\beta}} = \frac{1}{9}$ ou $\beta = -\frac{1}{90}$

Então, $\alpha 3^{90(-1/90)} = 18 \to \alpha = 54$

(3 pontos)

b)

$-18 + 54 \cdot 3^{-t/90} = -18 + 2/3$

Desta equação, tiramos $t = 360$ minutos.

(2 pontos)

Exemplo acima da média

a) $0 = -18 + \alpha . 3^{90\beta}$ $\qquad \alpha.3^{90\beta} = 18$ (a)

$-16 = -18 + \alpha . 3^{270\beta}$ $\qquad \alpha.3^{270\beta} = 2$ (b)

$\frac{a}{b} = \frac{3^{90\beta}}{3^{270\beta}} = 9 \Rightarrow \frac{3^{90\beta}}{3^{3.90\beta}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{3^{180\beta}} = 3^2$

$3^{-180\beta} = 3^2 \Rightarrow -180\beta = 2 \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{1}{90}}$

$\alpha.3^{90.-1/90} = 18 \Rightarrow \alpha.3^{-1} = 18 \Rightarrow \boxed{\alpha = 54}$

b) $T = -18 + \frac{2}{3} = \frac{-54+2}{3} = \frac{-52}{3}$

$-\frac{52}{3} = -18 + 54.3^{-t/90} \Rightarrow \frac{-52+54}{3} = \frac{54}{3^{t/90}}$

$3^{t/90} = 81 = 3^4 \Rightarrow \frac{t}{90} = 4 \Rightarrow \boxed{t = 360 \text{ mins}}$

Exemplo abaixo da média

a) $0.(90°) = -18 + \alpha 3^{\beta t}$

$0 = -18 + \alpha 3^{90\beta}$

$18 = \alpha 3^{90\beta}$

$\alpha = \frac{18}{3^{90\beta}}$

$-16.(270) = -18 + \alpha 3^{270\beta}$

$-4320 = -18 + \alpha 3^{270\beta}$

$-4302 = \alpha 3^{270\beta}$

$-4302 = \frac{18}{\cancel{3}^{90\beta}} \cdot \cancel{3}^{270\beta}$

$-4302 = 18 . 1^{3\beta}$

$-239 = 1^{3\beta}$

b)

Comentários

Esta questão avaliou se os candidatos eram capazes de formular e resolver um problema envolvendo um sistema de equações com a função exponencial. Vários candidatos substituíram incorretamente $T(t)$ por $T.t$, como ilustra o exemplo de resolução com nota abaixo da média apresentado acima. Outros não foram capazes de fazer contas com expoentes. Muitos candidatos representaram uma temperatura $(\frac{2}{3})°C$ acima de T_A como $(2/3).T_A$ em lugar de escreverem $T_A + 2/3$. Finalmente, houve quem afirmasse que a temperatura ambiente era de 25°C.

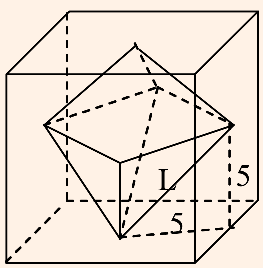
Questão 10

Considere um cubo cuja aresta mede 10cm. O sólido cujos vértices são os centros das faces do cubo é um octaedro regular, cujas faces são triângulos eqüiláteros congruentes.

a) Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular.
b) Calcule o volume do mesmo octaedro.

Resposta esperada

a)



a) $L^2 = 5^2 + 5^2$ portanto $L = 5\sqrt{2}$

As faces são triângulos equiláteros cujos lados medem $L = 5\sqrt{2}$, que é o comprimento da aresta do octaedro regular.

(2 pontos)

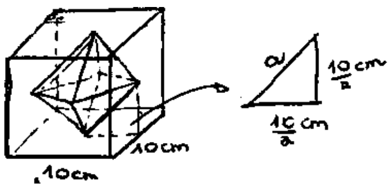
b) O volume do octaedro é $V = 2(\text{volume da pir, mide})$.

$$V = 2\left(\frac{1}{3}(\text{área da base})\cdot(\text{altura})\right) = \frac{2}{3}(5\sqrt{2})^2 \cdot 5 = \frac{500}{3}\,cm^2$$

(3 pontos)

Exemplo acima da média

a)



$a^2 = 5^2 + 5^2$

$a = 5\sqrt{2}$

RESP: a aresta mede $5\sqrt{2}$ cm

b) $V_{OCTAEDRO} = 2 \cdot V_{PIRÂMIDE}$

$V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot Sb \cdot H$

BASE DA PIRÂMIDE $l = 5\sqrt{2}$

$V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot 5$

$V_O = \frac{10 \cdot 50}{3}$

$V_O = 166{,}6\ldots\ cm^3$

RESP: O volume do octaedro é 166,6cm³

Exemplo abaixo da média

a) Cada triângulo equilátero congruente = 5 cm de aresta lateral = Raio

sendo $\pi \doteq 3{,}14$

$P = 2\pi \cdot R$

$P = 2 \times 3{,}14 \times 5$

$P \doteq 31{,}40$

A aresta deste octaedro mede 31,40 cm aproximadamente

b) $Ab = \pi \cdot R^2$

$Ab = 3{,}14 \times 25$

$Ab = 78{,}50$

$V = (78{,}50)^2 \times 10$ cm

$V = 61.622{,}5$

O volume do octaedro é 61.622,5 cm³

Comentários

Questão de geometria espacial que envolve, além do raciocínio, conhecimentos simples de geometria plana e visualização espacial. Este tipo de questão motiva os professores do ensino médio a desenvolver tais conteúdos em suas aulas. Como é uma questão de geometria espacial, espera-se que o candidato visualize a geometria do problema e tenha o ferramental algébrico para a sua solução.

Questão 11

Seja ***a*** um número real e seja:

$$p(x) = \det \begin{bmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{bmatrix}$$

a) Para $a = 1$, encontre todas as raízes da equação $p(x) = 0$.
b) Encontre os valores de a para os quais a equação $p(x) = 0$ tem uma única raiz real.

Resposta esperada

a)
Desenvolvendo o determinante, temos $p(x) = (3 - x)[(a - x)(1 - x) + 4]$.

Para $a = 1$, $p(x) = (3 - x)[(1 - x)^2 + 4] = 0$. As raízes desse polinômio do terceiro grau são: $x_1 = 3$ e $(1 - x)^2 = -4$, ou seja, $1 - x = \pm 2i$, ou ainda, $x = 1 \pm 2i$.

Resposta: Para $a = 1$, as raízes de $p(x)$ são $x_1 = 3$, $x_2 = 1 + 2i$ e $x_3 = 1 - 2i$.
(2 pontos)

b)
Se $\Delta < 0$, as duas raízes da equação $(a - x)(1 - x) + 4 = x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$ são complexas, de modo que, neste caso, a única raiz real de $p(x) = 0$ é $x = 3$.

Para $\Delta = 0$, a equação $x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$ tem uma raiz real [dupla], dada por (a+1)/2. Então, se (a+1)/2= 3, ou seja, se $a = 5$, esta raiz coincide com a raiz inicial $x = 3$. Assim, para $a = 5$, a equação $p(x) = 0$ tem uma única raiz real, que é $x = 3$ [raiz de multiplicidade 3] ...
$\Delta = (a+1)^2 - 4(a+4) = a^2 - 2a + 1 - 16 = (a-1)^2 - 16 < 0 \quad \leftrightarrow \quad (a-1)^2 < 16 \quad \leftrightarrow \quad -3 < a < 5$
Resposta: Os valores de a para os quais a equação $p(x) = 0$ tem uma única raiz real são
(3 pontos)

Exemplo acima da média

$a = 1$

(A) $\det\begin{bmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (3-x)(1-x)^2 + 4(3-x)$

$(3-x)[1 - 2x + x^2 + 4] \rightarrow$

$(3-x)(x^2 - 2x + 5)$

$\boxed{x_1 = 3}$ $\boxed{x_2 = 1+2i}$ $\boxed{x_3 = 1-2i}$

$\boxed{S = \{3;\ 1+2i;\ 1-2i\}}$

(B) $\det\begin{bmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (3-x)(a-x)(1-x) + 4(3-x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (3-x)(a - ax - x + x^2 + 4) = 0 \rightarrow x = 3$ (COMO EXIGE-SE APENAS UMA RAIZ REAL, $(x^2 + x(-a-1) + a + 4)$ TAMBÉM TEM COM RAIZ O NÚMERO 3", OU TER COMO RAIZ UM NÚMERO IMAGINÁRIO

Se $x = 3$; $9 - 3a - 3 + a + 4 = 0 \rightarrow -2a = -10 \rightarrow a = 5$

Se x FOR IMAGINÁRIO: Δ TEM DE SER $< 0 \rightarrow (-a-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a+4) < 0 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 - 2a - 15 < 0 \rightarrow$ -3 5

$\boxed{a =]-3, 5]}$

Exemplo abaixo da média

a) $\begin{vmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$

$(3-x)(1-x)(1-x) - [(4)(-1)(3-x)] = 0$

$(3 - 3x - x + x^2)(1-x) - [-12 + 12x] = 0$

$(x^2 - 4x + 3)(1-x) + 12 - 12x = 0$

$x^2 - x^3 - 4x + 4x^2 + 3 - 3x + 12 - 12x = 0$

$x^3 - 5x^2 + 19x - 15 = 0$

$x^3 - 5x^2 + 19x - 15 = 0$

raiz = 1

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 19 & -15 & 1 \\ \hline 1 & -4 & 15 & 0 & \end{array}$$

$\rightarrow$ resto

$x^2 - 4x + 15 = 0$

~~$\Delta = -4$~~

~~$\Delta = 15$~~

$\Delta = -44$

$x = \dfrac{4 \pm 2i\sqrt{11}}{2}$

$x = 2 \pm i\sqrt{11}$

b) Única Raiz real SPD

Por Cramer $D \neq 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

a pode ser qualquer valor real

$a \in \mathbb{R}$

Comentários

As soluções dos vestibulandos não apresentaram variações significativas em relação à solução apresentada pela banca. O objetivo da questão foi avaliar a habilidade dos candidatos de calcular determinantes (bastante simples) de ordem 3 e de lidar com números complexos, mas principalmente, de estudar as raízes de polinômios de grau 2. Os erros mais freqüentes são destacados a seguir. A maioria dos candidatos que tentaram resolver a questão foi desenvolvendo o polinômio de grau 3 obtido no cálculo do determinante. Ressaltamos que $p(x)$ obtém-se já fatorado. Em seguida, um erro muito comum foi o uso errado do método de Briot e Ruffini para procurar raízes racionais de polinômio. A maioria dos candidatos nem se preocupou em calcular o resto na divisão e verificar se ele é 0 ou não. (Recordamos que na realidade o uso desse método não é necessário pois uma das raízes já é conhecida pelas propriedades dos determinantes). O desempenho dos candidatos no item **b** foi bastante fraco. Aproximadamente 50% dos candidatos não conseguiram pontos; os que alcançaram 3 ou 4 pontos foram poucos. Somente 10 candidatos resolveram completamente a questão. A maioria dos que obtiveram 4 pontos esqueceu de estudar a possibilidade de o polinômio ter uma raiz tripla. Tudo isso indica que, no rendimento dos candidatos, a parte de polinômios e suas raízes deixa muito a desejar. Em resumo, a questão foi uma das difíceis, mas, devido ao primeiro item do enunciado, a porcentagem de notas 0 na questão foi relativamente baixa.

Questão 12

Considere a função quadrática $f(x) = x^2 + x\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$.

a) Resolva a equação *f(x) = 0* para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

b) Encontre os valores de α para os quais o número complexo é raiz da equação f (x) + 1 = 0.

Resposta esperada

a)

Para $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, temos $x^2 + x\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$, ou seja, $x^2 = 1$. Então, $x = \pm 1$.

(1 ponto)

b) Temos a equação $x^2 + x\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) + 1 = 0$.

Se $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ é raiz dessa equação, cujos coeficientes são reais, então o seu conjugado, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, também é raiz.

Aplicando Girard:

$$\operatorname{sen}(\alpha) + 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$-\cos(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1$$

Temos, então, $\cos(\alpha) = -1$ e $\operatorname{sen}(\alpha) = 0$, de forma que $\alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$

(4 pontos)

Exemplo acima da média

a) $f(x) = x^2 + x\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}_{=-1} \Rightarrow$

$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

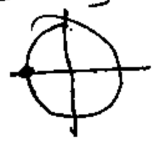
b) Se $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ é raiz $\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ também é raiz de $g(x)$

$g(x) = f(x) + 1$

$g(x) = \left[x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]\left[x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right] \Rightarrow$

$g(x) = x^2 - x + 1$ igualando com $f(x)$, Temos

$x^2 - x + 1 = x^2 + x\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 \Rightarrow$

$\begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \operatorname{sen}\alpha + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 

$\boxed{\alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

Exemplo abaixo da média

a) $x^2 + x \cdot \cancel{\cos\frac{3\pi}{2}}^{0} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 \qquad x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm 1 \qquad S = \{1, -1\}$

b) $x^2 + x\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 = 0$

$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 = 0$

$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}(-1) + \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 = 0$

Comentários

Pode-se considerar que esta questão apresenta um grau razoável de dificuldade, não devido a sua essência, mas pelo fato de que a matéria não é muito explorada em colégios e cursos preparatórios. A familiaridade no tratamento de números complexos é fundamental para o candidato que pretende ingressar nos cursos de ciências exatas e tecnológicas. A solução apresentada pela banca é altamente satisfatória. Convém ressaltar que a parte (a) da questão é trivial e direta, não existindo alternativas reais além daquela apresentada pela banca. Para a resolução da segunda parte, o uso da seguinte propriedade é fundamental: se ë $= a + ib$ é raiz da equação em pauta, então o seu conjugado ë$^{-} = a - ib$ também o é. A solução apresentada pela banca e em geral usada pelos candidatos utiliza o Método de Girard. Existe uma alternativa intuitiva (e de certo modo equivalente a Girard) que consiste em construir um sistema de equações através da substituição de *x* por $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Através deste método também se chega facilmente à solução. Existe ainda uma terceira alternativa que seria ignorar a propriedade acima , lançar o a solução $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ na equação e utilizar o fato de que se temos uma equação do tipo $x + iy = 0 + i0$, então $x = 0$ e $y = 0$.

No exemplo de resposta considerada abaixo da média, o candidato resolve sem dificuldades a parte (a) e não consegue encaminhar a parte (b). Observa-se que a grande maioria dos candidatos que não tiraram zero nesta questão teve este comportamento.

Como um comentário final, enfatizamos que a existência de parâmetros em uma equação e a conseqüente possibilidade de estudar suas raízes em função dos parâmetros tornam o problema interessante. Uma análise qualitativa desta variação em relação aos parâmetros tem muitas aplicações práticas encontradas em diversos fenômenos da natureza. Quando o problema está inserido dentro dos números complexos, toda equação possui solução (diferentemente do que acontece dentro do mundo dos números reais). Estes comentários pretendem realçar a relevância da questão em pauta. De qualquer modo, o candidato com conhecimento de elementos básicos de números complexos poderia, numa situação normal, pontuar integralmente esta questão.