UNICAMP

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMISSÃO PERMANENTE PARA OS VESTIBULARES

banespa
Grupo Santander Banespa

2004

vestibular nacional

UNICAMP

2ª Fase

Matemática

INTRODUÇÃO

As doze questões de matemática da segunda fase são apresentadas em ordem crescente de dificuldade. As quatro primeiras questões procuram avaliar os conteúdos e as habilidades pertinentes às quatro primeiras séries do ensino fundamental, especialmente leitura e compreensão de enunciados, raciocínio lógico e operações elementares. As quatro questões intermediárias focalizam a matemática usualmente presente nas últimas séries do ensino fundamental e no início do Ensino Médio. As últimas questões envolvem problemas mais elaborados, que exigem raciocínio mais complexo e conteúdos mais avançados. Questões envolvendo polinômios e suas raízes têm sido freqüentes e os resultados, neste conteúdo, insatisfatórios.

QUESTÃO 1

Em uma sala há uma lâmpada, uma televisão [TV] e um aparelho de ar condicionado [AC]. O consumo da lâmpada equivale a 2/3 do consumo da TV e o consumo do AC equivale a 10 vezes o consumo da TV. Se a lâmpada, a TV e o AC forem ligados simultaneamente, o consumo total de energia será de 1,05 quilowatts hora [kWh]. Pergunta-se:

a) Se um kWh custa R$0,40, qual será o custo para manter a lâmpada, a TV e o AC ligados por 4 horas por dia durante 30 dias?

b) Qual é o consumo, em kWh, da TV?

RESPOSTA ESPERADA

a) (2 pontos)

Seja L o consumo da lâmpada, TV o consumo da televisão e AC o consumo do aparelho de ar condicionado. Então, L + TV + AC = 1,05 kWh.

Assim, o custo mensal é dado por R$ 0,40 x 30 x 4 x 1,05.

Resposta: R$ 50,40.

b) (3 pontos)

L = (2/3) TV.   AC = 10 TV.

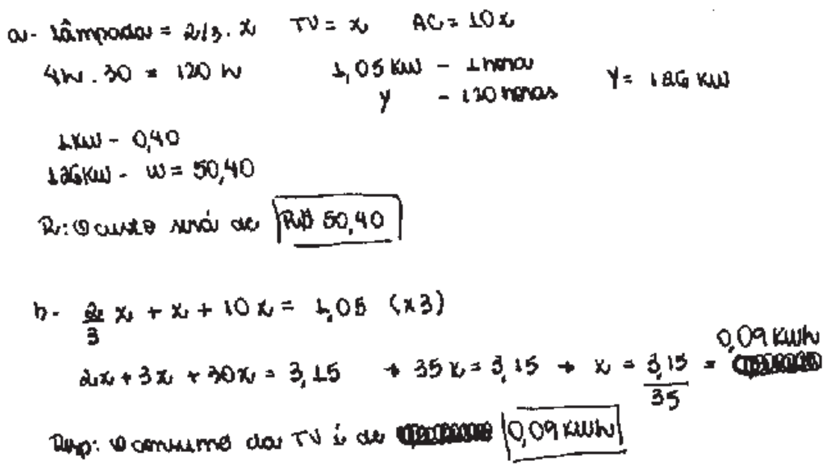
Então: TV + (2/3) TV + 10 TV = 1,05.

3 TV + 2 TV + 30 TV = 3,15.

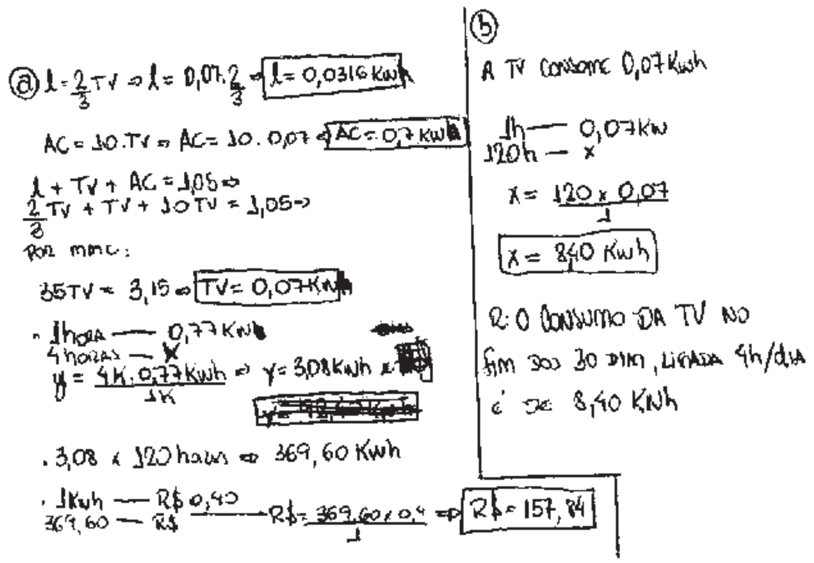
35 TV = 3,15.

Portanto, TV = 0,09 kWh. O consumo da TV é igual a 0,09 kWh.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA


a- lâmpada = 2/3 . x   TV = x   AC = 10x
4w . 30 = 120 w   1,05 KW — 1 hora
y — 120 horas   Y = 126 KW
1 KW — 0,40
126 KW — w = 50,40
R: O custo será de $\boxed{R\$\ 50,40}$
b- $\frac{2}{3}x + x + 10x = 1,05$ (x3)
$2x + 3x + 30x = 3,15 \rightarrow 35x = 3,15 \rightarrow x = \frac{3,15}{35} =$ 0,09 KWh
Resp: O consumo da TV é de $\boxed{0,09\ KWh}$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA


ⓐ $l = \frac{2}{3}TV \Rightarrow l = 0,07 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{l = 0,0316\ Kwh}$
$AC = 10 \cdot TV \Rightarrow AC = 10 \cdot 0,07 \Rightarrow \boxed{AC = 0,7\ Kwh}$
$l + TV + AC = 1,05 \Rightarrow$
$\frac{2}{3}TV + TV + 10TV = 1,05 \rightarrow$
Por mmc:
$35TV = 3,15 \Rightarrow \boxed{TV = 0,07\ Kwh}$
· 1hora — 0,77 Kwh
4 horas — y
$y = \frac{4h \cdot 0,77\ Kwh}{1h} \Rightarrow y = 3,08\ Kwh$
· 3,08 x 120 horas ⇒ 369,60 Kwh
· 1Kwh — R$ 0,40
369,60 — R$ ⟶ $R\$ = \frac{369,60 \times 0,4}{1} \Rightarrow \boxed{R\$ = 157,84}$
ⓑ A TV consome 0,07 Kwh
1h — 0,07 Kw
120h — x
$x = \frac{120 \times 0,07}{1}$
$\boxed{x = 8,40\ Kwh}$
R: O consumo da TV no fim dos 30 dias, ligada 4h/dia é de 8,40 Kwh

COMENTÁRIOS

Questão simples, envolvendo apenas aritmética elementar. Seu propósito era analisar a capacidade dos candidatos de interpretar problemas cotidianos que envolvem matemática. Quase todos os candidatos tentaram resolver a questão e a enorme maioria acertou o item a. Dois terços dos candidatos obtiveram nota máxima e cerca de 90% receberam nota maior que 2. Só 2,6% tiraram menos que 1 ponto.

QUESTÃO 2

Sabe-se que o número natural D, quando dividido por 31, deixa resto $r \in N$ e que o mesmo número D, quando dividido por 17, deixa resto 2r.

a) Qual é o maior valor possível para o número natural r?

b) Se o primeiro quociente for igual a 4 e o segundo quociente for igual a 7, calcule o valor numérico de D.

RESPOSTA ESPERADA

a) (3 pontos)

$0 \le 2r < 17$.

Assim, $0 \le r \le 8$. Resposta: o maior valor possível para r é 8.

b) (2 pontos)

$D = 31 \cdot 4 + r$. $D = 17 \cdot 7 + 2r$.

Então, $31 \cdot 4 + r = 17 \cdot 7 + 2r$.

Assim, $124 + r = 119 + 2r$, ou seja, r = 5.

Resposta: D = 129.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) $\begin{array}{l|l} D & 31 \\ \hline r & \end{array}$ $\begin{array}{l|l} D & 17 \\ \hline 2r & \end{array}$ $0 \le r < 30$

$0 \le 2r \le 16 \rightarrow 0 \le r \le 8$

∴ O máximo valor possível para r é 8.

b) $\begin{array}{l|l} D & 31 \\ \hline r & 4 \end{array}$ $\begin{array}{l|l} D & 17 \\ \hline 2r & 7 \end{array}$ $\begin{cases} 4 \times 31 + r = D \\ 7 \times 17 + 2r = D \end{cases}$

$\begin{cases} 124 + r = D \\ 119 + 2r = D \end{cases} (-)$

$r - 5 = 0$

$r = 5$

$\begin{cases} r = 5 \\ D = 129 \end{cases}$

∴ O valor numérico de D é 129.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

A- $\begin{cases} D \div 31 = r \\ D \div 17 = 2r \end{cases}$ substituindo $D = 17 . 2r$ $D = 34r$

$34r \div 31 = r$
$34r^2 = 31$
$r^2 = 0,9$
$\boxed{r = 0,3}$

O maior valor natural para r é 0,3.

B- $\begin{cases} D . 4 = 31 \\ D . 7 = 17 \end{cases}$

$\boxed{\text{D pode ser } 7,705 \text{ ou } 2,40.}$

COMENTÁRIOS

Questão tida como de fácil resolução. Apesar disso, foi verificada uma dificuldade maior do que a esperada, devido a uma diversidade de respostas apresentadas. Frases e até parágrafos inteiros foram apresentados como justificativa da resposta, contrapondo-se à notação matemática. Apenas 28,3% dos candidatos obtiveram nota máxima enquanto que 25,0% não resolveram a questão ou resolveram erroneamente.

QUESTÃO 3

Um triângulo eqüilátero tem o mesmo perímetro que um hexágono regular cujo lado mede 1,5 cm. Calcule:

a) O comprimento de cada lado do triângulo.

b) A razão entre as áreas do hexágono e do triângulo.

RESPOSTA ESPERADA

a) (2 pontos)

Seja L o comprimento do lado do triângulo, então 3L = 6 . 1,5 = 9. Logo L = 3.

Resposta: cada lado do triângulo mede 3 cm.

b) (3 pontos)

A área A_h do hexágono regular com lado 1,5 cm é igual a

$$A_h = \frac{6}{2} 1,5 . \frac{1,5\sqrt{3}}{2} = 3,375\sqrt{3}$$ cm.

A área do triângulo eqüilátero com lado 3 cm é $A_t = \frac{3}{2} . \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = 2,25\sqrt{3}$ cm.

Resposta: a razão entre as áreas do hexágono e do triângulo é dada por A_t/A_h = 1,5.

O item b admite uma solução alternativa, observando-se que o hexágono consiste de 6 triângulos eqüiláteros de lado 1,5 cm. Mas tal triângulo tem área que é 4 vezes menor que a do triângulo com lado 3 cm. Então a razão solicitada é igual a 4/6 = 1,5.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) Hexágono: $P = 6.\ell = 6.1,5$

$P = 9\text{cm}$

Triângulo: mesmo P

$P = 3\ell' \rightarrow 9 = 3\ell'$

$\ell' = 3\text{cm}$

Cada lado do triângulo mede 3cm

b) $A_H = 6.\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6.(1,5)^2\sqrt{3}}{4} = 1,5 . 2,25.\sqrt{3}$

$A_T = \dfrac{\ell'^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = 2,25\sqrt{3}$

$R = \dfrac{A_H}{A_T} = \dfrac{1,5.2,25.\sqrt{3}}{2,25.\sqrt{3}} = 1,5 = \dfrac{3}{2}$

A razão entre as áreas do hexágono e do triângulo é de 3/2

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) 2p triângulo = 2p hexágono

2p hexágono = $6.\,1,5 = 9\text{cm}$//

2p triângulo = $9\text{cm} = 3l \Leftrightarrow l = 3\text{cm}$//

O comprimento do ~~área~~ lado do triângulo é 3cm//

b) $S_{triângulo} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$

$S_{hexágono} = 6\dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6(1,5)^2\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$

$\dfrac{S_{hexágono}}{S_{triângulo}} = \dfrac{6(1,5)^2\sqrt{3}}{4} . \dfrac{4}{9\sqrt{3}} = 1$//

A Razão é 1.

COMENTÁRIOS

A questão exige conhecimento de noções bastante simples de geometria, tais como perímetro e área. O item a não representou dificuldades para os alunos. A maioria dos alunos resolveu o item b calculando as áreas das duas figuras. Houve candidatos que não conheciam o que é um hexágono, outros erraram ao escrever que ele tem 7 ou ainda 8 lados... Era bastante comum encontrar fórmulas erradas para a área de triângulo. Alguns alunos calcularam as áreas aproximadamente e, em seguida, obtiveram, para a razão, valores esquisitos. Foi relativamente comum também errar nas duas áreas, mas de modo a obter a razão correta. Quase a metade dos vestibulandos resolveu completamente a questão, enquanto os zeros foram em torno de 6%. A grande maioria dos candidatos resolveu o item a.

QUESTÃO 4

Sejam a e b números inteiros e seja N(a, b) a soma do quadrado da diferença entre a e b com o dobro do produto de a por b.

a) Calcule N(3, 9).

b) Calcule N(a, 3a) e diga qual é o algarismo final de N(a, 3a) para qualquer $a \in Z$.

RESPOSTA ESPERADA

a) (3 pontos)

$$N(a,b) = (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

Resposta: $N(3,9) = 3^2 + 9^2 = 90$.

b) (2 pontos)

$$N(a,3a) = a^2 + (3a)^2 = 10a^2.$$

Logo, o algarismo final de N(a, 3a) é igual a zero.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) $N(a,b) = (a-b)^2 + 2 \cdot a \cdot b$

$N(3,9) = 36 + 54$

$N(3,9) = 90$ $\boxed{R: 90}$

b) $N(a,3a) = 4a^2 + 6a^2$

$N(a,3a) = 10a^2$

R: O último algarismo de N(a,3a) para qualquer $a \in \mathbb{Z}$ será zero (0).

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) Em relação ao enunciado onde $N(a,b) = (a^2-b^2)+2ab$, temos:

$$N(3,9) = (3^2-9^2) + 2(3)(9) = (9-81) + 54$$

$$\therefore \boxed{N(3,9) = -18}$$ O valor de $N(3,9)$ é de -18.

b) Seguindo a regra dita no item a

$$N(a,3a) = (a^2-(3a)^2) + 2(a)(3a) = (a^2-9a^2) + 6a^2$$

$$\therefore \boxed{N(a,3a) = -2a^2}$$ O valor de $N(a,3a)$ é de $-2a^2$ e seu algarismo final vale -2.

COMENTÁRIOS

Questão de resolução simples, que visa avaliar a capacidade dos alunos do Ensino Médio em definir e manipular funções de duas variáveis. Infelizmente, muitos candidatos interpretaram a expressão "... o dobro do produto de a por b ..." como "$2a/b$". O número de notas elevadas foi alto, como esperado pela banca. Mais de um terço dos candidatos obtiveram nota 5 e cerca de dois terços dos estudantes obtiveram nota maior ou igual a 4. Apesar disso, um quinto dos candidatos não entendeu a questão, tirando nota 0.

QUESTÃO 5

Entre todos os triângulos cujos lados têm como medidas números inteiros e perímetro igual a 24 cm, apenas um deles é eqüilátero e apenas um deles é retângulo. Sabe-se que um dos catetos do triângulo retângulo mede 8 cm.

a) Calcule a área do triângulo eqüilátero.

b) Encontre o raio da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.

RESPOSTA ESPERADA

a) (2 pontos)

L = 8 cm.

$$A_T = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} = 8\sqrt{12} = 4\sqrt{48}$$

Resposta: a área do triângulo eqüilátero é igual a $4\sqrt{48}$ cm^2

b) (3 pontos)

$a+b+8=24$ e $a^2=b^2+64$.

Logo, $b=16-a$ e $a^2=(16-a)^2+64$.

Assim, $a^2=256-32a+a^2+64$, ou seja, $32a=320$,

ou ainda, a = 10 cm.

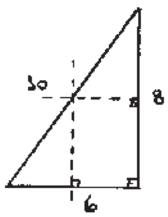
O raio da circunferência é, neste caso, igual à metade da hipotenusa do triângulo. Portanto, o raio da circunferência é igual a 5 cm.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) No triângulo equilátero todos os lados serão iguais a 8, logo obtemos: $S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \underline{64\sqrt{3}\,cm^2}$

A área do triângulo equilátero é igual a $\underline{64\sqrt{3}\,cm^2}$

b) Sabendo que um cateto mede 8cm, por pitágoras obtemos:
$8^2+x^2=(16-x)^2 \Rightarrow 64+x^2=256-32x+x^2 \Leftrightarrow x=6$. Portanto o outro cateto mede 6cm e a hipotenusa 10cm.

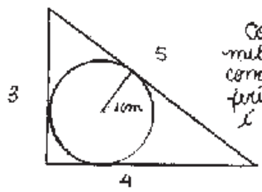


Por ser um triângulo retângulo, a sua hipotenusa é o diâmetro da circunferência circunscrita a este:
$2R=10 \Rightarrow \underline{R=5cm}$
O raio desta circunferência mede $\underline{5cm}$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) Como o triângulo é equilátero os três lados possuem o mesmo valor ($\ell = 8$ cm), logo sua área é: $\frac{b\cdot h}{2} = \frac{8\cdot 8}{2} = 32\,cm^2$

b) Através do conhecido triângulo 3,4,5 - podemos concluir que o os valor do triângulo retângulo são - 6,8,10. Sendo 6 e 8 os catetos e 10 a hipotenusa



Como o triângulo do desenho é metade do triângulo, chegamos a conclusão de que o valor do raio da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo é de 2 cm

COMENTÁRIOS

Questão tida como de fácil resolução. Vários candidatos tentaram, de alguma forma, mostrar seu conhecimento no assunto, no caso, geometrias plana e métrica. A nota máxima foi obtida por 35,4% dos candidatos e apenas 5,8% deixaram a questão em branco ou apresentaram resolução errada.

QUESTÃO 6

Suponha que, em uma prova, um aluno gaste para resolver cada questão, a partir da segunda, o dobro de tempo gasto para resolver a questão anterior. Suponha ainda que, para resolver todas as questões, exceto a última, ele tenha gasto 63,5 minutos e para resolver todas as questões, exceto as duas últimas, ele tenha gasto 31,5 minutos. Calcule:

a) O número total de questões da referida prova.

b) O tempo necessário para que aquele aluno resolva todas as questões da prova.

RESPOSTA ESPERADA

a) (3 pontos)

Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ os valores do tempo gasto para resolver as questões $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

$$t_2 = 2t_1; \quad t_3 = 2t_2 = 2^2 t_1; \quad \cdots \quad t_n = 2^{n-1} t_1$$

$$t + t_2 + \ldots + t_{n-1} = 63{,}5. \quad t + t_2 + \ldots + t_{n-2} = 31{,}5.$$

Subtraindo, temos: $t_{n-1} = 32 = 2^{n-2} t_1$. Portanto, $t_1 = 2^{7-n}$.

$t + 2t_1 + 2^2 t_1 + \ldots + 2^{n-1} t_1 = 63{,}5.$ Assim, $t_1(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2}) = 63{,}5.$

Logo, $t_1(2^{n-1} - 1) = 63{,}5 \;\Rightarrow\; 2^{7-n}(2^{n-1} - 1) = 63{,}5.$

$$2^{7-n+n-1} - 2^{7-n} = 63{,}5 \;\Rightarrow\; 2^6 - 63{,}5 = 2^{7-n} \;\Rightarrow\; 2^{-1} = 2^{7-n} \;\Rightarrow\; 7 - n = -1$$

Portanto, n = 8. Resposta: a prova tem 8 questões.

b) (2 pontos)

Do item a, temos n = 8. Então, $t_1 = 2^{7-8} = 1/2$ minuto.
Logo o tempo necessário para a resolução de todas questões será

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = 1/2 + 1 + 2 + \ldots + 64 = 127{,}5$$

Resposta: o tempo necessário para o aluno resolver toda a prova equivale a 127,5 minutos.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) Trata-se de uma P.G. de n-termos $(a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n)$ de razão $\boxed{q = 2}$

a_1 ↓ tempo gasto p/ 1ª questão

(I) com informação do texto temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} = 63{,}5 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} = 31{,}5 \end{cases} \ominus$$

$$a_{n-1} = 32 \text{ min}$$

(II) pela equação do termo geral da PG, temos:

$$\boxed{a_1 = a_n \cdot q^{n-1}}$$

$$a_{n+1} = a_{n-1} \cdot q^{n-(n-1)}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q^1 \rightarrow a_n = 32 \cdot 2$$

$$a_n = 64 \text{ min}$$

(III) Tempo da prova = 63,5 + 64 = 127,5 min

(IV) Pela equação de Soma da PG temos: $\Sigma_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \rightarrow 127{,}5 = \dfrac{\frac{64}{2^{n-1}} \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \rightarrow$

$$\rightarrow a_n = a_1 \cdot 2^{n-1} \qquad a_1 = \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{64}{2^{n-1}}$$

$$127{,}5 = \frac{64}{\frac{2^n}{2^1}} \cdot (2^n - 1) \rightarrow 127{,}5 = \frac{128}{2^n} \cdot (2^n - 1) \rightarrow 127{,}5 \cdot 2^n = 128 \cdot (2^n - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 127{,}5 \cdot 2^n = 128 \cdot 2^n - 128 \rightarrow 2^n = 256 \rightarrow \log_2 256 = n \rightarrow n = \log_2 2^8 \therefore \underline{n = 8}$$

Resp.: O número de questões é 8.

b) Pela resolução III e IV do item a temos que o tempo p/ resolver todas as questões é de 127,5 min.

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) a_1 , $2a_1$, $4.a_1$, $8a_1$ $\quad x a_1$

$63,5 - 31,5 = 32 \to 2^5 \to 5 + 2 = 7$

Resp: A prova tem 7 questões.

b) $7^2 = 128$ minutos.

COMENTÁRIOS

A questão exige raciocínios com progressão geométrica. Os dois itens podem ser resolvidos de modos independentes. Ressaltamos que vários alunos resolveram primeiro o item b e em seguida o utilizaram na resolução de a. A questão era considerada pela banca de nível médio e os resultados comprovaram essa expectativa. Temos que ressaltar que uma boa parte dos alunos não têm conhecimentos básicos sobre progressões e, como conseqüência, 50% dos vestibulandos obtiveram 0 na questão.

QUESTÃO 7

A função $L(x) = ae^{bx}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada.

a) Calcule os valores numéricos das constantes a e b, sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.

b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

RESPOSTA ESPERADA

a) (2 pontos)

$L(x) = ae^{bx}$. $\quad 60 = ae^{b}$. $\quad 30 = ae^{2b}$.

$e^{b} = \frac{1}{2}$. Logo, $b = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2) \cong -0{,}693$.

$60 = \frac{1}{2}a$. Assim, a = 120.

b) (3 pontos)

$120e^{-\ln(2)x} = 15$. Assim, $e^{-\ln(2)x} = \frac{1}{8} \Rightarrow -\ln(2)x = -3\ln(2)$. Portanto, x = 3.

Resposta: a lâmpada dista 3 metros do objeto.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) $a e^{b} = 60$ e $a e^{2b} = 30$

$\dfrac{a(e^{b})^2}{a e^{b}} = \dfrac{30}{60} \Rightarrow e^{b} = 2^{-1}$

$\therefore b = \log_e 2^{-1} \Rightarrow a e^{\log_e 2^{-1}} = 60 \Rightarrow$

$a \cdot \frac{1}{2} = 60 \Rightarrow a = 120$

R: $a = 120$ e $b = \log_e 2^{-1}$

b) $15 = 120 \cdot e^{\log_e 2^{-1}} \Rightarrow 15 = 120 \cdot \frac{1}{2^{x}} \Rightarrow$

$2^{x} = \frac{120}{15} \Rightarrow 2^{x} = 2^{3}$

R: Como a função exponencial é injetora, $x = 3$, a distancia é 3 metros

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

$L(1) = a \cdot e^{b1} = 60$

$L(2) = a \cdot e^{b.2} = 30$

b-) 60 luxes → 1 metro

÷2 30 luxes – 2 metros ×2

÷2 15 luxes – x ×2

$x = 2 \cdot 2$

$x = 4$ m

COMENTÁRIOS

Esta questão avaliou se os candidatos eram capazes de resolver um problema prático envolvendo as funções exponencial e logarítmica. As notas, muito baixas em uma questão que podia ser resolvida em poucas linhas, indicam a necessidade de que o assunto receba mais atenção por parte dos professores do Ensino Médio. Uma parcela considerável dos candidatos não foi capaz de formular o sistema de equações exigido no item a. Muitos sequer conheciam a constante e e, imaginando tratar-se de uma variável do problema, tentaram determinar seu valor. A questão teve 41% de notas abaixo de 1 e apenas 9% de notas acima de 4, podendo ser considerada difícil. 71% dos candidatos não chegaram aos dois pontos, confirmando a pouca familiaridade dos alunos do Ensino Médio com a função exponencial e com logaritmos.

QUESTÃO 8

Dada a equação polinomial com coeficientes reais $x^3 - 5x^2 + 9x - a = 0$:

a) Encontre o valor numérico de a de modo que o número complexo 2 + i seja uma das raízes da referida equação.

b) Para o valor de a encontrado no item anterior, determine as outras duas raízes da mesma equação.

RESPOSTA ESPERADA

a) (3 pontos)

$$x^3 - 5x^2 + 9x - a = 0. \qquad x_1 = 2 + i. \qquad x_2 = 2 - i.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2 + i + 2 - i + x_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1.$$

$$a = (2+i)\cdot(2-i)\cdot 1 = 4 + 1 = 5.$$

b) (2 pontos)

$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$. Resposta: as raízes da equação são $x_1 = 2 + i$, $x_2 = 2 - i$ e $x_3 = 1$.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) Como 2+i é uma raiz, temos

p/ $x = 2+i \Rightarrow$ $x^3 - 5x^2 + 9x - a = 0$

$(2+i)^3 - 5(2+i)^2 + 9(2+i) - a = 0$

$8 + 3(2)^2 \cdot i + 3(2)\cdot i^2 + i^3 - 5(4 + 4i + i^2) + 18 + 9i - a = 0$

$8 + 12i + 6(-1) - i - 20 - 20i - 5(-1) + 18 + 9i - a = 0$

$\boxed{a = 5}$

Resp: a = 5

b) Como 2+i é uma raiz, temos que seu conjugado, isto é, 2−i, também é raiz. Logo: $x_1 = 2+i$
$x_2 = 2-i$

Assim: $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 1(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 1(x - 2 - i)(x - 2 + i)(x - x_3)$

$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 1[(x-2)^2 - i^2](x - x_3)$

$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = [x^2 - 4x + 4 + 1](x - x_3)$

$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = x^3 - 4x^2 + 5x - x^2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_3 \cdot x - 5x_3$

Logo: $-5x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 1$

Resp: As duas outras raízes são: $x_2 = 2 - i$; $x_3 = 1$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) Para equação polinomial de ordem 3 há 3 raízes possíveis;
Se o complexo $2+i$ é raiz, seu conjugado também é $(2-i)$.

$x^3 - 5x^2 + 9x = a$

$x.(x^2 - 5x + 9) = a$

b) $2+i$
$2-i$

COMENTÁRIOS

Questão tida como de dificuldade média. Pode-se inferir, aqui, que o importante assunto, equações polinomiais e relações entre raízes e coeficientes, não está sendo devidamente abordado no Ensino Médio, isto é, está muito aquém do desejado. Apenas 33,6% obtiveram nota máxima enquanto que 45,8% deixaram a questão em branco ou não resolveram de modo a pontuar.

QUESTÃO 9

Considere o conjunto dos dígitos {1, 2, 3, ..., 9} e forme com eles números de nove algarismos distintos.

a) Quantos desses números são pares?

b) Escolhendo-se ao acaso um dos números do item (a), qual a probabilidade de que este número tenha exatamente dois dígitos ímpares juntos?

RESPOSTA ESPERADA

a) (2 pontos)

O último algarismo de um número par será 2, 4, 6, 8. Logo teremos 4.8! números pares que satisfazem o enunciado.

b) (3 pontos)

Temos 4.5 = 20 maneiras diferentes de formar um número de dois algarismos distintos entre 1, 3, 5, 7, 9. Ainda existem 4! maneiras distintas de combinar este número de dois algarismos com os três algarismos ímpares restantes, e 4! maneiras de combinar os algarismos pares.

Logo a quantidade dos números pares com exatamente dois dígitos impares consecutivos é igual a 5. 4! . 4! = $5.(4!)^2$.

A probabilidade de escolhermos um tal número é igual a

$$\frac{5.4.4!.4!}{4.8!} = \frac{4.3.2}{8.7.6} = \frac{1}{14}.$$

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 |

↳ números pares: {2, 4, 6 ou 8}.

↳ 8 números distintos podem ser usados.

$4 \cdot 8! = 161.280$ são pares.

161.280 são números pares.

b) I: ímpares.
P: pares.

$P_5 = 5 \cdot 4 = 20$ (2I).
↳ 5 números ímpares.

2I / P / I / P / I / P / I / P.
$20 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2880$.

2I podem estar em outras posições: 4 posições diferentes.

$\frac{4 \cdot 2880}{161\,280} = \frac{1}{14}$.

A probabilidade é de 1 em 14 (1/14).

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) Pares e ímpares = 9!

Proporção entre pares e ímpares = $\frac{4}{5}$

$NP = 9! \cdot \frac{4}{5} = \boxed{290\,304 \text{ pares}}$

b) _ _ _ _ _ _ _ _ _ (8 localizações possíveis do par)

I I P I P I P I P

$\frac{5}{9}\ \frac{4}{8}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{6}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1} = \frac{1}{126}$

$p(II) = \frac{1}{126} \cdot 8 = \boxed{\frac{4}{63}}$

COMENTÁRIOS

A questão 9 comprovou (mais uma vez) que os vestibulandos continuam encontrando dificuldades com problemas do gênero. Observamos que o maior obstáculo para os alunos foi o de interpretar o enunciado de modo adequado. A previsão da banca era de uma questão de dificuldade média/difícil, e os resultados confirmaram essa previsão. Aproximadamente a metade dos candidatos obteve nota 0; entre as notas positivas, houve maior concentração para a nota 2. Tradicionalmente as questões de combinatória (contagem) apresentam dificuldades para os alunos, o que confirmou a nossa observação. Muitos alunos não conseguiram fazer os cálculos corretos mesmo no item a da questão, ou os fizeram erroneamente.

QUESTÃO 10

Os pontos A, B, C e D pertencem ao gráfico da função $y = 1/x,\ x > 0$. As abcissas de A, B e C são iguais a 2, 3 e 4, respectivamente, e o segmento AB é paralelo ao segmento CD.

a) Encontre as coordenadas do ponto D.

b) Mostre que a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos AB e CD passa também pela origem.

RESPOSTA ESPERADA

a) (2 pontos)

Os quatro pontos a que se refere o enunciado são $A\,(2, \frac{1}{2}),\ B\,(3, \frac{1}{3}),\ C\,(4, \frac{1}{4})\ e\ D\,(x, \frac{1}{x}),\ x \neq 4.$

Uma vez que o segmento AB é paralelo ao segmento CD, temos $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x-4} = \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{3-2} = -\dfrac{1}{6}$.

Logo, $6\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4}\right) = 4 - x$, ou seja, $6(4-x)/(4x) = 4 - x$, donde obtemos $x = 6/4 = 3/2$.

Assim, $D\,(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$.

b) (3 pontos)

O ponto médio da reta AB é $M_1 = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{12}\right)$.

O ponto médio da reta CD é $M_2 = \left(\dfrac{4 + \frac{3}{2}}{2}, \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{4}, \dfrac{11}{24}\right)$.

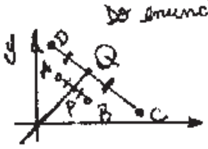
Assim, .

$$y - \frac{5}{12} = \frac{\frac{11}{24} - \frac{5}{12}}{\frac{11}{4} - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{5}{12} = \frac{1/24}{2/8}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

Portanto, a reta é dada por 6y – x = 0, que passa pela origem.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

Do enunciado:



$A(2, \frac{1}{2})$

$B(3, \frac{1}{3})$

$C(4, \frac{1}{4})$

$D(a, \frac{1}{a})$

a) Como $\overline{AB} // \overline{CD}$:

$m_{AB} = m_{CD}$

$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{3-2} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{a}}{4-a} \Rightarrow 2a^2 - 11a + 12 = 0$

$a = 4$ (N/c) $\quad a = \frac{3}{2}$

logo as coordenadas do ponto D é $(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$

b) Sendo P e Q pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente

tem-se: $P\left(\frac{3-2}{2} ; \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2}\right) \therefore P(\frac{1}{2}, \frac{1}{12})$

$Q\left(\frac{4-\frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{2}\right) \therefore Q(\frac{5}{4}, \frac{5}{24})$

Portanto a reta que passa por $\overline{PQ}$ é: $m_{PQ} = \frac{\frac{5}{24}-\frac{1}{12}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}$

$m_{PQ} = \frac{1}{6}$ e o ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}) \therefore y = \frac{x}{6}$, logo passa pela origem

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) 1) $m_{AB} = \frac{2-3}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ 2) $m_{AB} = -6$

3) $m_{AB} = m_{CD}$ 4) $-6 = \frac{4-x}{\frac{1}{4}-\frac{1}{x}}$ 5) $x = 4$ ou $x = \frac{3}{2}$

R: $D(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$

b)

COMENTÁRIOS

Esta questão exigiu do candidato o conhecimento de vários tópicos matemáticos do Ensino Médio, como a hipérbole e seu gráfico, a equação da reta, a determinação do ponto médio de um segmento de reta e a demonstração de uma hipótese simples (que a reta que passa pelos pontos médios passa pela origem). Embora nenhum dos assuntos possa ser considerado particularmente difícil, a combinação deles não foi bem assimilada pelos candidatos, mais acostumados com problemas que envolvem um único tema e têm resolução mais direta. Questão bastante difícil, teve 73,5% de notas abaixo de 1 e 83% de notas abaixo de 2. Apenas 8,3% dos candidatos tiraram nota igual ou superior a 4.

QUESTÃO 11

Dado o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} [\cos(\alpha)+\text{sen}(\alpha)]x & +[2\,\text{sen}(\alpha)]y & = & 0 \\ [\cos(\alpha)]x & +[\cos(\alpha)-\text{sen}(\alpha)]y & = & 0 \end{cases}$$

a) Encontre os valores de α para os quais esse sistema admite solução não-trivial, isto é, solução diferente da solução $x = y = 0$.

b) Para o valor de α encontrado no item (a) que está no intervalo $[0, \pi/2]$, encontre uma solução não-trivial do sistema.

RESPOSTA ESPERADA

a) (2 pontos)

Para que haja solução não trivial, é preciso que $\det\begin{pmatrix} \cos(\alpha)+\text{sen}(\alpha) & 2\,\text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \cos(\alpha)-\text{sen}(\alpha) \end{pmatrix} = 0$,

ou seja, $\cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha) - 2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = 0$. Logo, $\cos(2\alpha) = \text{sen}(2\alpha)$.

Assim, $2\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in Z$, ou $\alpha = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2},\ \ k \in Z$.

b) (3 pontos)

$\alpha = \dfrac{\pi}{8}$. Escolhendo $x = 1$, temos $y = -\dfrac{\cos(\pi/8)}{\cos(\pi/8) - \text{sen}(\pi/8)} = -\dfrac{1}{1 - \tan(\pi/8)}$.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA

a) $\begin{vmatrix} \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha & 2\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 0$

$\Rightarrow -\operatorname{sen}2\alpha + \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}2\alpha = \cos 2\alpha$

$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{h\pi}{2},\ h \in \mathbb{Z}$

$S = \{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{h\pi}{2},\ h \in \mathbb{Z}\}$

b) $y = \frac{-x(\cos\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{8})}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}$. Como o sistema é possível e indeterminado, devemos atribuir um valor a x.

p/ $x = 1 \Rightarrow y = \frac{-(\cos\pi/8 + \operatorname{sen}\pi/8)}{2\operatorname{sen}\pi/8}$

$S = \left\{\left(1, \frac{-(\cos\pi/8 + \operatorname{sen}\pi/8)}{2\operatorname{sen}\pi/8}\right)\right\}$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

a) Solução não trivial $D = 0$

$\begin{vmatrix} \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha & 2\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$

$(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) - 2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha = 0$

$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha = 0$

$\cos 2\alpha - \operatorname{sen}2\alpha = 0$

$2\alpha(\cos - \operatorname{sen}) = 0$

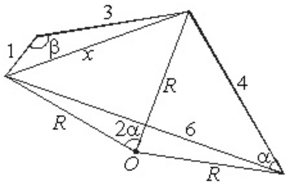
$\boxed{\alpha = 0^\circ}$ $\quad \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

b) $\begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{2}x + \frac{2\sqrt{2}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x = 0 \end{cases} \quad X = 0 \quad$ ou $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $x = y$ não existe

COMENTÁRIOS

Pode-se inferir, aqui, que o importante assunto trigonometria, envolvendo, em particular, relações e equações trigonométricas, não está sendo devidamente abordado no Ensino Médio, isto é, está muito aquém do desejado. Questão tida como de difícil resolução, apresentou o mais alto índice de notas zero ou provas em branco, 88,6%, enquanto que apenas 0,2% obtiveram nota máxima.

QUESTÃO 12



O quadrilátero convexo ABCD, cujos lados medem, consecutivamente, 1, 3, 4 e 6 cm, está inscrito em uma circunferência de centro O e raio R.

a) Calcule o raio R da circunferência.

b) Calcule o volume do cone reto cuja base é o círculo de raio R e cuja altura mede 5 cm.

RESPOSTA ESPERADA

a) (4 pontos)

Considere, no desenho, os dois ângulos opostos α e β, temos que $\alpha + \beta = \pi$ pois o quadrilátero é inscrito.

Então para a diagonal x temos $x = 2R^2[1 - \text{cós}(2\alpha)] = 4R^2 \operatorname{sen}^2\alpha$. Segundo a lei do cosseno, temos $x^2 = 10 - 6 \cos \beta = 10 + 6 \cos \alpha$, e analogamente $x^2 = 52 - 48 \cos \alpha$.

Logo $\cos \alpha = 7/9$ e $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 49/81 = 32/81$.

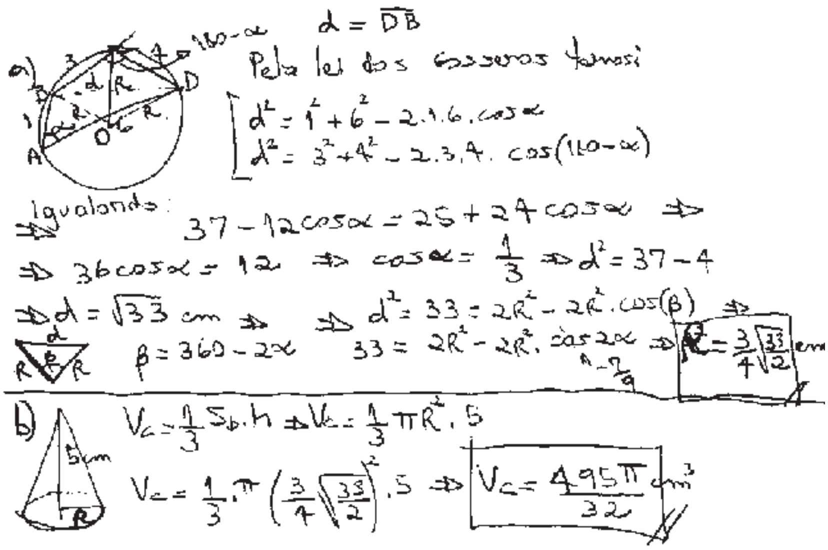
Então $4R^2.(32/81) = 10 + 6.(7/9) = 132/9$ e $4R^2 = (132.81)/(9.32) = 297/8$,

donde $R^2 = 297/32$ e $R = \dfrac{3\sqrt{33}}{\sqrt{32}} \approx 3{,}0465$

b) (1 ponto)

O volume V do cone é igual a $V = (1/3)\pi\, R^2h$ onde h é a altura. Logo $V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{297}{32}5 = \dfrac{495}{32}\pi$ cm^2.

EXEMPLO ACIMA DA MÉDIA



a) $d = \overline{DB}$

Pela lei dos cossenos temos:

$d^2 = 1^2 + 6^2 - 2.1.6.\cos\alpha$

$d^2 = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos(180-\alpha)$

Igualando: $37 - 12\cos\alpha = 25 + 24\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 36\cos\alpha = 12 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow d^2 = 37 - 4$

$\Rightarrow d = \sqrt{33}$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow d^2 = 33 = 2R^2 - 2R^2.\cos(\beta) \Rightarrow$

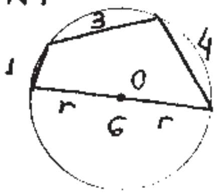
$\beta = 360 - 2\alpha$ $\quad 33 = 2R^2 - 2R^2.\underbrace{\cos 2\alpha}_{-7/9} \Rightarrow \boxed{R = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{33}{2}}\text{ cm}}$

b) $V_c = \frac{1}{3}S_b.h \Rightarrow V_c = \frac{1}{3}\pi R^2.5$

$V_c = \frac{1}{3}.\pi\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{33}{2}}\right)^2.5 \Rightarrow \boxed{V_c = \frac{495\pi}{32}\text{ cm}^3}$

EXEMPLO ABAIXO DA MÉDIA

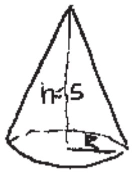
A)



$2r = 6$

$\boxed{r = 3\ cm}$

b)



$V = \frac{1}{3} Ab \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{\cancel{3}} \pi \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 5$

$\boxed{V = 15\pi\ cm^3}$

R: O volume do cone será de $15\pi\ cm^3$

COMENTÁRIOS

Os resultados confirmaram a previsão da banca elaboradora. Três entre quatro vestibulandos obtiveram 0 na questão, e as notas acima de 1 ponto representaram 1% do total. Ressaltamos que o item a foi o mais difícil, e ele não trata de geometria espacial. Esse resultado indica que os alunos têm que prestar mais atenção à geometria plana e mais especificamente às questões que envolvem aplicação de relações métricas, tais como as leis do seno e do cosseno.