UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2006

# vestibular nacional UNICAMP

2ª Fase

Matemática

# Matemática

## INTRODUÇÃO

A prova de matemática da segunda fase do vestibular da UNICAMP é elaborada de forma a identificar os candidatos com boa capacidade de leitura de textos e de formulação de problemas, bom raciocínio abstrato e domínio dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e no ensino médio. Muitas questões abrangem mais de um tópico de matemática, de modo que é possível encontrar problemas que mesclam trigonometria com geometria plana, ou a solução de polinômios com progressão aritmética. Além disso, a maioria das questões envolve a aplicação da matemática à resolução de problemas cotidianos, exigindo do candidato a formulação de modelos capazes de expressar matematicamente o problema. Finalmente, ao comentar a prova de matemática do vestibular 2006, decidimos apresentar estratégias alternativas de resolução das questões. Assim, sempre que um item vier acompanhado de um apóstrofo, como em **a’** ou **b’**, uma maneira diferente (e equivalente) de se obter a solução do problema é apresentada, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos leitores.

### Instruções:

• Indique claramente as respostas dos itens de cada questão, fornecendo as unidades, caso existam.

• Apresente de forma clara e ordenada os passos utilizados na resolução das questões. Expressões incompreensíveis, bem como respostas não fundamentadas, não serão aceitas.

• Ao apresentar a resolução das questões, evite textos longos e dê preferência às fórmulas e expressões matemáticas.

**Atenção:** Não basta escrever apenas o resultado final: é necessário mostrar os cálculos ou o raciocínio utilizado.

**1.** Um carro irá participar de uma corrida em que terá que percorrer 70 voltas em uma pista com 4,4 km de extensão. Como o carro tem um rendimento médio de 1,6 km/l e seu tanque só comporta 60 litros, o piloto terá que parar para reabastecer durante a corrida.

**a)** Supondo que o carro iniciará a corrida com o tanque cheio, quantas voltas completas ele poderá percorrer antes de parar para o primeiro reabastecimento?

**b)** Qual é o volume total de combustível que será gasto por esse carro na corrida?

## Resposta Esperada

a) **(3 pontos)**

Se o motor do carro tem um rendimento de 1,6 km/l e o tanque comporta 60 litros, então é possível percorrer 60x1,6 = 96 km com o volume de combustível de um tanque cheio. Para obter o número máximo de voltas que o carro pode percorrer, devemos dividir esse valor pelo comprimento da pista, ou seja, calcular, 96/4,4 = 21,81. Como esse valor não é inteiro, concluímos que o carro poderá percorrer 21 voltas completas.

**Resposta: o carro poderá percorrer 21 voltas completas antes de reabastecer.**

b) **(2 pontos)**

Ao final das 70 voltas, o carro terá percorrido 70x4,4 = 308 km. Dividindo esse valor pelo rendimento de 1,6 km/l, obtemos 308/1,6 = 192,5 litros, o volume total de combustível gasto na corrida.

**Resposta: o carro irá gastar 192,5 litros de combustível na corrida.**

# Matemática

## Exemplo Acima da Média

a) Nº de litros gastos por volta:

$\frac{4,4 Km}{1,6 Km/l} \Rightarrow 2,75$ litros por volta.

Nº de voltas para 1 tanque (60L)

$\frac{60 L}{2,75 L/volta} = 21,8$ voltas $\longrightarrow$ R: Ele poderá dar 21 voltas completas

b) Volume total gasto na corrida:

$2,75 L/volta \times 70$ voltas $= 192,50 L$

## Exemplo Abaixo da Média

a) $60 l \div 1,6 km/l = 37,5 km$

$37,5 km \div 4,4 \simeq \boxed{8,5 \text{ voltas}}$

$\boxed{\text{Voltas completas} = = 08}$

Resp: O carro poderá percorrer 08 (oito) voltas completas.

b) $4,4 km \times 1,6 km/l = 7,04 l$ por volta

$7,04 \times 70$ voltas $= \boxed{492,80 l}$

Resp: Esse carro gastará 492,80 l nesta corrida

## Comentários

Questão sem muita dificuldade, exigindo apenas conhecimentos básicos da matemática do ensino fundamental. A simples compreensão do texto e a aplicação correta da regra de três são suficientes para resolvê-la. Mais de 60% dos candidatos tiraram nota máxima. Ainda assim, muitos tiveram dificuldade em efetuar cálculos com números decimais.

# Matemática

**2.** Uma empresa tem 5000 funcionários. Desses, 48% têm mais de 30 anos, 36% são especializados e 1400 têm mais de 30 anos e são especializados. Com base nesses dados, pergunta-se:

**a)** Quantos funcionários têm até 30 anos e não são especializados?

**b)** Escolhendo um funcionário ao acaso, qual a probabilidade de ele ter até 30 anos e ser especializado?

## Resposta Esperada

a) **(3 pontos)**

| **Idade dos funcionários** | **Grau de especialização dos funcionários** | | |
|---|---|---|---|
| | **Especializados** | **Não especializados** | **Total** |
| Menos de 30 anos | B | C | A |
| 30 anos ou mais | 1400 | B’ | 5000x0,48 = 2400 |
| Total | 5000x0,36 = 1800 | A’ | 5000 |

O número de funcionários com mais de 30 anos é igual a 5000x0,48 = 2400, de modo que A = 5000 – 2400 = 2600 funcionários têm até 30 anos. O número de funcionários especializados é igual a 5000x0,36 = 1800. Como 1400 funcionários têm mais de 30 anos e são especializados, sobram B = 1800 – 1400 = 400 funcionários com até 30 anos e especializados. Assim, o número de funcionários com até 30 anos e não especializados é igual a C = A – B = 2600 – 400 = 2200.

**Resposta: a empresa possui 2200 funcionários não especializados com até 30 anos.**

a’)

O número de funcionários com mais de 30 anos é igual a 5000x0,48 = 2400. O número de funcionários especializados é igual a 5000x0,36 = 1800, de modo que A’ = 5000 – 1800 = 3200 funcionários não são especializados. Como dos 2400 funcionários com mais de 30 anos, 1400 são especializados, temos B’ = 2400 – 1400 = 1000 funcionários com mais de 30 anos e não especializados. Assim, o número de funcionários com até 30 anos e não especializados é igual a C = A’ – B’ = 3200 – 1000 = 2200.

**Resposta: a empresa possui 2200 funcionários não especializados com até 30 anos.**

b) **(2 pontos)**

Dos 1800 funcionários especializados, 1400 possuem mais de 30 anos, de modo que B = 1800 – 1400 = 400 funcionários têm até 30 anos e são especializados. Assim, a probabilidade de que um funcionário escolhido ao acaso tenha até 30 anos e seja especializado é de 400/5000 = 0,08, ou 8%.

**Resposta: a probabilidade é de 0,08, ou 8%.**

## Exemplo Acima da Média

a)

| | até 30 anos | mais de 30 anos |
|---|---|---|
| Esp. | a | 1400 |
| Não Esp. | b | c |

do enunciado têm-se:

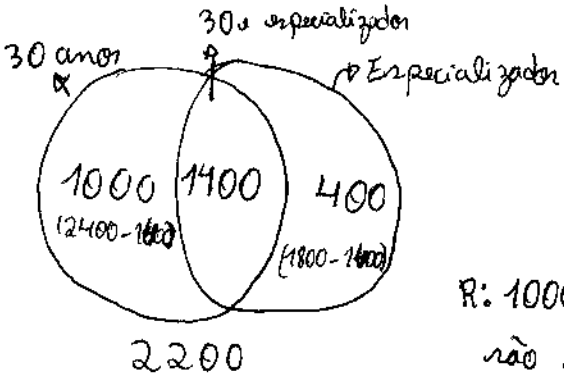
$$\begin{cases} a+b=(1-0{,}48)5000 \\ a+1400=0{,}36.5000 \end{cases} \Rightarrow b-1400=(0{,}52-0{,}36)5000 \Leftrightarrow b=2200$$

R: 2200 funcionários têm até 30 anos e não são especializados

b) do sistema do item anterior, $a = 0{,}36 \cdot 5000 - 1400 \Leftrightarrow a = 400$

$P = \dfrac{400}{5000} \Leftrightarrow \underline{P = 8\%}$

## Exemplo Abaixo da Média




$\dfrac{48}{100} \cdot 5000 = 2400$ ↳ Tem mais de 30 anos

$\dfrac{36}{100} \cdot 5000 = 1800$ ↳ São especializados

R: 1000 funcionários tem até 30 anos e não são especializados

(b) $P(30) = \dfrac{2400}{5000} \times P(E) = \dfrac{1800}{5000} = 17{,}28\%$ R: A probabilidade é 17,28%

## Comentários

Questão simples, envolvendo a compreensão do texto e os conceitos de porcentagem e probabilidade. O uso de uma tabela ou de um diagrama de Venn é recomendado, pois facilita a compreensão do problema e, por conseguinte, a sua resolução. Mais da metade dos candidatos acertou os dois itens da questão, ainda que muitos tenham tido dificuldade de compreender o enunciado. A nota média ficou próxima de 3.

**3.** Um cidadão precavido foi fazer uma retirada de dinheiro em um banco. Para tanto, levou sua mala executiva, cujo interior tem 56 cm de comprimento, 39 cm de largura e 10 cm de altura. O cidadão só pretende carregar notas de R$ 50,00. Cada nota tem 140 mm de comprimento, 65 mm de largura, 0,2 mm de espessura e densidade igual a 0,75 g/cm$^3$.

**a)** Qual é a máxima quantia, em reais, que o cidadão poderá colocar na mala?

**b)** Se a mala vazia pesa 2,6 kg, qual será o peso da mala cheia de dinheiro?

## Resposta Esperada

a) **(3 pontos)**

Observamos que 56 cm = 4x140 mm e que 39 cm = 6x65 mm, de modo que se pode guardar o dinheiro em camadas de exatamente 6x4 = 24 notas. O número de camadas é igual a 10/0,02 = 500. Assim, podemos guardar na mala 24x500 = 12000 notas, ou seja, 12000xR$50,00 = R$600.000,00.

**Resposta: pode-se colocar, no máximo, R$600.000,00 na mala.**

b) **(2 pontos)**

O dinheiro ocupa todo o volume interno da mala, que corresponde a 56x39x10 = 21.840 $cm^3$. O peso do dinheiro é dado por 21.840 $cm^3$ x 0,75 $g/cm^3$ = 16.380 g, ou 16,38 kg. Somando-se, a esse valor, o peso da mala, obtemos 16,38+2,6 = 18,98 kg.

**Resposta: a mala cheia pesa 18,98 kg.**

b')

Cada nota tem um volume de 14x6,5x0,02 = 1,82 $cm^3$. Assim, as 12000 notas têm, somadas, 21.840 $cm^3$. O peso do dinheiro é dado por 21.840 $cm^3$ x 0,75 $g/cm^3$ = 16.380 g, ou 16,38 kg. Somando-se, a esse valor, o peso da mala, obtemos 16,38+2,6 = 18,98 kg.

**Resposta: a mala cheia pesa 18,98 kg.**

## Exemplo Acima da Média

a) Primeiro calculamos quantas notas cabem na mala depois multiplicamos pelo valor das notas.

Comprimento $x = \frac{560mm}{140mm} = \boxed{4}$ Largura $y = \frac{390mm}{65mm} = \boxed{6}$ Altura $z = \frac{100mm}{0,2mm} = \boxed{500}$

$x.y.z = n^{\underline{o}}$ de notas $n^{\underline{o}}$ de notas $= \boxed{12000}$ 12000.50 = Valor em reais $\boxed{V = 600.000 \text{reais}}$

Ele poderá colocar na mala o valor de 600.000 reais.

b) Calcularemos o peso aproximado de cada nota através da densidade e de suas dimensões.

$140mm.65mm.0,2m = 14cm.6,5cm.0,02cm = 1,82cm^3$ $1,82cm^3 . 0,75\frac{g}{cm^3} = 1,365g$

$1,365 . 12000 \text{notas} = 16.380g = 16,38kg$ $16,38kg + 2,6kg = \boxed{18,98kg}$

A mala pesará no total 18,98kg.

## Exemplo Abaixo da Média

a) $V_{mala} = Ab . h$

$V_{mala} = 56 . 39 . 10$

$V_{mala} = 21840 \ cm^3$

$V_{nota} = Ab . h$

$V_{nota} = 1,4 . 0,65 . 0,002$

$V_{nota} = 0,00182 \ cm^3$

1 nota — $182 . 10^{-5} \ cm^3$

x notas — $2184 . 10 \ cm^3$

$x = \frac{2184 . 10}{182 . 10^{-5}} \Rightarrow x = 12 . 10^6$ notas de R\$ 50,00

∴ $12 . 10^6$ notas de R\$ 50,00 corresponde a uma quantia de R\$ 600.000.000,00.

b) $d = \frac{m}{V}$

$0{,}75 = \frac{m}{182 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow m = 1365 \cdot 10^{-6}\,g$

$m = 1365 \cdot 10^{-9}\,Kg$ (uma nota)

$\therefore 12 \cdot 10^{6}$ notas $\cdot\, 1365 \cdot 10^{-9} = 16380 \cdot 10^{-3}\,Kg$

as notas pesam 16,38 Kg.

Sendo assim a mala cheia pesa $\rightarrow$ $\boxed{18{,}98\,Kg}$

## Comentários

Questão simples, envolvendo um tema atual, que exigiu conhecimentos sobre geometria espacial, manipulação de unidades e fatoração de números inteiros. Apesar de ser uma questão relativamente fácil, vários candidatos apresentaram respostas estapafúrdias, principalmente em virtude de erros na conversão de unidades. Assim, não foi incomum encontrar um peso de poucos gramas ou de várias toneladas para a mala. Valores como esses sugerem que, no ensino médio, não se têm dado ênfase suficiente à análise crítica das respostas encontradas.

**4.** Seja S o conjunto dos números naturais cuja representação decimal é formada apenas pelos algarismos 0, 1, 2, 3 e 4.

**a)** Seja x = | 2 | 0 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 1 |   |   | um número de dez algarismos pertencente a S, cujos dois últimos algarismos têm igual probabilidade de assumir qualquer valor inteiro de 0 a 4. Qual a probabilidade de que x seja divisível por 15?

**b)** Quantos números menores que um bilhão e múltiplos de quatro pertencem ao conjunto S?

## Resposta Esperada

a) **(3 pontos)**

Para ser divisível por 15, um número deve ser divisível por 3 e por 5. Um número é divisível por 5 somente quando seu último algarismo é 0 ou 5. Como os números que contêm o algarismo 5 não pertencem ao conjunto *S*, concluímos que o último algarismo de *x* só pode ser 0. Para que *x* seja divisível por 3, é preciso que a soma dos seus algarismos seja divisível por 3. A soma dos 9 algarismos conhecidos é igual a 16. O quociente da divisão de 16 por 3 é 5, e o resto é igual a 1. Assim, a soma do penúltimo algarismo de *x* com 1 deve fornecer um número múltiplo de 3. Dos algarismos disponíveis, apenas o 2 satisfaz essa exigência, de modo que os dois últimos algarismos de *x* são 2 e 0, respectivamente. Como cada um desses dois algarismos poderia ser igual a 0, 1, 2, 3 ou 4, temos 5x5 = 25 pares possíveis, dois quais apenas o 20 torna *x* divisível por 15. Assim, a probabilidade é de 1/25.

**Resposta: a probabilidade é de 1/25, ou 0,04, ou, ainda, 4%.**

b) **(2 pontos)**

Os números menores que 1.000.000.000 têm, no máximo, 9 algarismos. Para descobrir se um número pertencente a *S* é divisível por quatro, basta analisar seus dois últimos algarismos, de modo que os sete primeiros algarismos podem assumir qualquer valor de 0 a 4. Já os dois últimos só podem ser 00, 04, 12, 20, 24, 32, 40 ou 44. Assim, temos $5^7$x8 = 625.000 números múltiplos de 4.

**Resposta: O conjunto *S* possui 625.000 números múltiplos de 4.**

## Exemplo Acima da Média

$x \rightarrow$ penúltimo número
$y \rightarrow$ último número

a. $2+0+3+4+1+3+2+1+x+y \longrightarrow$ divisível por 3
$x+y+16 \rightarrow$ divisível por 3

como $x \in S$ e $y \in S$ : $x+y=2$ ou
$x+y=5$ ou
$x+y=8$

$y \rightarrow$ divisível por 5 $\therefore$ $y=0$
se $y=0$ $\quad x+y=2$
$x=2$

($x+y$ não pode ser maior que 4)

$\therefore \boxed{P = \frac{1}{25}}$

b.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 0 | 0 |
| | | | | | | | | 0 | 4 |
| | | | | | | | | 1 | 2 |
| | | | | | | | | 2 | 0 |
| | | | | | | | | 2 | 4 |
| | | | | | | | | 3 | 2 |
| | | | | | | | | 4 | 0 |
| | | | | | | | | 4 | 4 |

5.5.5.5,5.5.5

últimos números possíveis

$8.5^7 = 625000$ números

## Exemplo Abaixo da Média

a) Para ser divisível por 15 o número deve ser divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo. Para o número em questão atender a essa condição os números finais devem ser 3 e 0. Para que isso ocorra temos uma possibilidade em 5 para o três e uma possibilidade em 5 para o zero. Assim tiramos a probabilidade $1/5 \cdot 1/5 = 1/25$ ou 4%. Portanto a probabilidade é de 4%

b) Para serem múltiplos de 4 os números devem ser múltiplos de 2 duas vezes, ou terminar com o número quatro ou zero ou os dois últimos números serem um número múltiplo de 4. Para isso temos 5 chances de ocorrer uma combinação de $5^8$ números então temos 1953125 números menores que um bilhão que são múltiplos de 4.

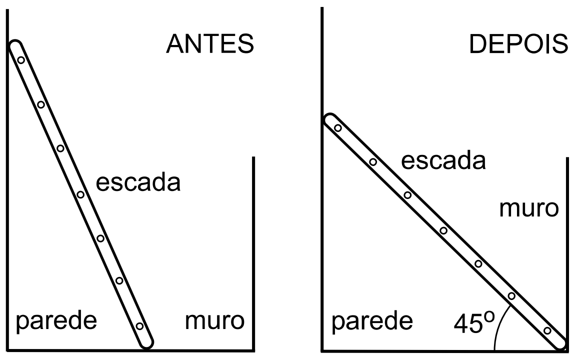
## Comentários

A questão aborda as técnicas básicas de contagem, divisibilidade e o conceito de probabilidades. A resolução não depende do uso de fórmulas e os cálculos são simples. Muitos candidatos exageraram nas "explicações textuais", com frases longas e sem destaque para os pontos importantes. No item **a**, diversos candidatos apresentaram respostas com valores muito maiores que 1, o que demonstra uma falta de compreensão do conceito de probabilidade. O número de notas zero foi altíssimo (cerca de 2/3 do total), o que não era esperado. Aproximadamente 20% dos candidatos conseguiram responder satisfatoriamente o primeiro item da questão.

**5.** Para trocar uma lâmpada, Roberto encostou uma escada na parede de sua casa, de forma que o topo da escada ficou a uma altura de aproximadamente $\sqrt{14}$ m. Enquanto Roberto subia os degraus, a base da escada escorregou por 1 m, indo tocar o muro paralelo à parede, conforme ilustração abaixo. Refeito do susto, Roberto reparou que, após deslizar, a escada passou a fazer um ângulo de 45° com a horizontal. Pergunta-se:

**a)** Qual é a distância entre a parede da casa e o muro?

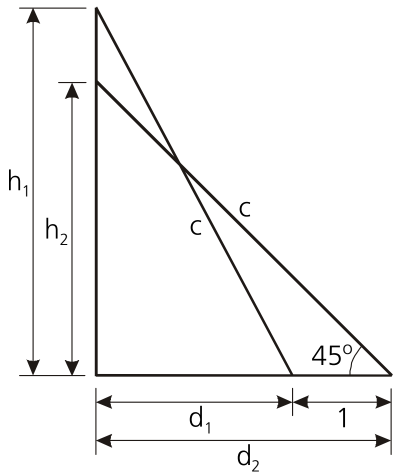
**b)** Qual é o comprimento da escada de Roberto?




## Resposta Esperada

a) **(4 pontos)**

A figura abaixo ilustra as duas situações mencionadas no texto.




Como a escada faz um ângulo de 45° com a horizontal na posição final, $d_2 = h_2$. Além disso, sabemos que $h_1 = \sqrt{14}$ e que $d_2 = d_1 + 1$. Deste modo, usando o Teorema de Pitágoras, chegamos ao sistema $\begin{cases} c^2 = \left(\sqrt{14}\right)^2 + d_1^2 \\ c^2 = 2(d_1+1)^2 \end{cases}$.

# Matemática

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos $d_1^2 + 4d_1 - 12 = 0$.

Resolvendo essa equação, descobrimos que $d_1 = -6$ ou $d_1 = 2$. Desprezando a raiz negativa, concluímos que $d_2 = d_1 + 1 = 3$.

**Resposta: a parede da casa está a 3 metros do muro.**

a')

Também podemos escrever o sistema: $\begin{cases} c^2 = \left(\sqrt{14}\right)^2 + (d_2 - 1)^2 \\ d_2 / c = \cos(45°) = \sqrt{2}/2 \end{cases}$.

Neste caso, isolando c na segunda equação, obtemos $c = d_2\sqrt{2}$. Substituindo esse valor na primeira equação, chegamos a $d_2^2 + 2d_2 - 15 = 0$. Resolvendo essa equação, descobrimos que $d_2 = -5$ ou $d_2 = 3$. Finalmente, desprezando a raiz negativa, concluímos que $d_2 = 3$ metros.

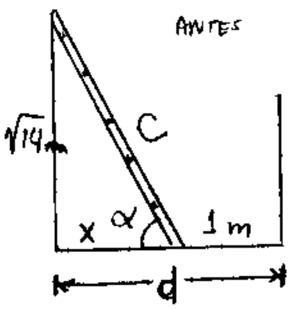
**Resposta: a parede da casa está a 3 metros do muro.**

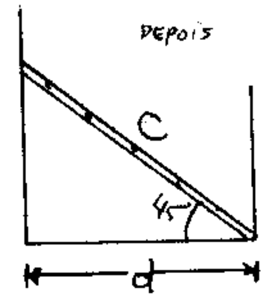
b) **(1 ponto)**

Como $c^2 = 2d_2^2 = 18$, temos $c = 3\sqrt{2}$.

**Resposta: a escada possui $3\sqrt{2}$ metros.**

## Exemplo Acima da Média




$\cos 45° = \frac{d}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2} \cdot c = 2 \cdot d$

$c = \frac{2d}{\sqrt{2}}$

$\boxed{c = d\sqrt{2}}$

$\boxed{X = d - 1}$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{c} = \frac{\sqrt{14}}{d\sqrt{2}}$

$\cos\alpha = \frac{x}{c} = \frac{d-1}{d\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{\sqrt{14}}{d\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{d-1}{d\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

$\frac{14}{d^2 \cdot 2} + \frac{d^2 - 2d + 1}{d^2 \cdot 2} = 1$

$\frac{15 + d^2 - 2d}{d^2 \cdot 2} = 1$

$d^2 - 2d + 15 = 2 \cdot d^2$

$-d^2 - 2d + 15 = 0 \quad (-1)$

$d^2 + 2d - 15 = 0$

A) $d = -5$ ñ·c

$\boxed{d = 3m}$

B) $c = d\sqrt{2}$

$\boxed{C = 3\sqrt{2}\,m}$

onde: d = distância entre a parede e o muro

c = comprimento da escada

## Exemplo Abaixo da Média

a) Assim como a base da escada, a extremidade também deslocou 2 m. E depois de encostar no muro é possível notar que a ~~escada~~ é a diagonal de um quadrado. Dessa forma a distância do muro até a parede é a mesma distância da altura da escada após ter escorregado 2 m.

R: $\sqrt{14} - 1$ m

b) Sendo a diagonal de um quadrado $\sqrt{2} . l$, então:

R: $\sqrt{2} (\sqrt{14} - 1)$ m

## Comentários

Para resolver essa questão, o candidato deveria observar atentamente a figura apresentada e aplicar apropriadamente o teorema de Pitágoras. Também era necessário usar o seguinte resultado básico da geometria de triângulos: se um dos ângulos de um triângulo retângulo mede 45 graus o outro ângulo também mede 45 graus e, portanto, o triângulo é isósceles. A questão teve um número grande de notas zero e cinco, indicando que aqueles que foram capazes de formular corretamente o problema chegaram sem dificuldades à sua solução. Muitos candidatos preferiram escrever um sistema em função de $c$ e $d_2$, obtendo diretamente a distância entre a parede e o muro.

**6.** A concentração de $CO_2$ na atmosfera vem sendo medida, desde 1958, pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual de crescimento da concentração de $CO_2$ irá se manter constante nos próximos anos.

**a)** Escreva uma função C(t) que represente a concentração de $CO_2$ na atmosfera em relação ao tempo t, dado em anos. Considere como instante inicial — ou seja, aquele em que t = 0 — o ano de 2004, no qual foi observada uma concentração de 377,4 ppm de $CO_2$ na atmosfera.

**b)** Determine aproximadamente em que ano a concentração de $CO_2$ na atmosfera será 50% superior àquela observada em 2004. Se necessário, use $\log_{10} 2 \cong 0{,}3010$, $\log_{10} 2{,}01 \cong 0{,}3032$ e $\log_{10} 3 \cong 0{,}4771$.

## Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como a taxa anual de crescimento da concentração de $CO_2$ é de 0,5%, a cada ano que passa, a concentração é multiplicada por 1,005. Assim, a cada $t$ anos, a concentração é multiplicada por $1{,}005^t$. Chamando de $C_0$ a concentração inicial de $CO_2$, a concentração após $t$ anos é dada pela função exponencial $C(t) = C_0 . (1{,}005)^t$ . Como, no ano de 2004, tínhamos $C_0$ = 377,4 ppm, a função desejada é $C(t) = 377{,}4.(1{,}005)^t$.

**Resposta: a função é $C(t) = 377{,}4.(1{,}005)^t$.**

b) **(3 pontos)**

Suponhamos que em $t$ anos, contados a partir de 2004, a concentração será 50% maior. Neste caso, teremos $\frac{3}{2} C_0 = C_0 \cdot (1{,}005)^t$, ou simplesmente $\frac{3}{2} = (1{,}005)^t$. Aplicando o logaritmo na base 10 aos dois lados dessa equação, obtemos $\log(3/2) = t \log(1{,}005)$. Assim, $t = [\log(3) - \log(2)] / \log(1{,}005)$. Como não conhecemos o logaritmo de 1,005, usamos

$t = [\log(3) - \log(2)] / \log(2{,}01/2) = [\log(3) - \log(2)] / [\log(2{,}01) - \log(2)]$. Com base nos valores de $\log(2)$, $\log(2{,}01)$ e $\log(3)$ fornecidos, obtemos $t = [0{,}4771 - 0{,}3010] / [0{,}3032 - 0{,}3010] \cong 80{,}05$.
**Resposta: a concentração de $CO_2$ na atmosfera será 50% superior àquela observada em 2004 por volta do ano de 2084.**

## Exemplo Acima da Média

a) Considerando como instante inicial ($t = 0$) o ano de 2004, quando c era igual a 377,4 ppm, a função $C(t)$, com c em ppm e t em anos, temos:

$$C(t) = 377{,}4 \cdot (1 + 0{,}5\%)^t \Rightarrow \boxed{C(t) = 377{,}4 \cdot (1{,}005)^t}$$

b) Para uma concentração de $CO_2$ 50% superior à de 2004, temos que $C(t) = 1{,}5 \cdot 377{,}4$. Então:

$$1{,}5 \cdot \cancel{377{,}4} = \cancel{377{,}4} \cdot (1{,}005)^t \Leftrightarrow 1{,}5 = (1{,}005)^t \Leftrightarrow \log (1{,}005)^t = \log 1{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \log\left(\frac{2{,}01}{2}\right) = \log\left(\frac{30}{20}\right) \Leftrightarrow t\left(\log 2{,}01 - \log 2\right) = \left(\log 30 - \log 20\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\left(\log 2{,}01 - \log 2\right) = \left(\log 3 - \log 2\right) \Leftrightarrow t\left(0{,}3032 - 0{,}3010\right) =$$

$$= 0{,}4771 - 0{,}3010 \Leftrightarrow 0{,}0022\, t = 0{,}1761 \Leftrightarrow t = \frac{1761}{22} \Leftrightarrow t \cong 80 \text{ anos}$$

Assim, a concentração de $CO_2$ na atmosfera será 50% superior àquela observada em 2004 aproximadamente no ano de $2004 + t =$ $= 2084$.

## Exemplo Abaixo da Média

a) Sei que no instante zero temos uma concentração de 377,4 ppm; e que a cada ano essa concentração aumenta 0,5%. Sabendo que a forma decimal de 0,5% é igual a $5 \times 10^{-3}$, então:

$$C(t) = 377{,}4 + 5 \times 10^{-3} \times t$$

b) I) Se em t anos a concentração de $CO_2$ for 50% superior a de 2004, então $C(t)$ igual a:

$$C(t) = 1{,}5 \times 377{,}4$$
$$C(t) = 566{,}1 \text{ ppm}$$

II) Sabendo que $c(t)$ igual a 566,1 ppm, então:

$$C(t) = 377{,}4 + 5 \times 10^{-3} \cdot t$$
$$566{,}1 = 377{,}4 + 5 \times 10^{-3} \cdot t$$
$$t = \frac{566{,}1 - 377{,}4}{5 \times 10^{-3}}$$
$$t = 377{,}4 \times 10^2$$
$$t = 37740 \text{ anos}$$

III) Se demorou 37740 anos, então:

$$t = 2004 + 37740$$
$$t = 39744$$

IV) A concentração de $CO_2$ na atmosfera será 50% superior a de 2004 ~~em~~ no ano de 39.744

## Comentários

Essa questão aborda temas importantes como porcentagens, funções, equações exponenciais e propriedades dos logaritmos. Para resolvê-la, é preciso observar que fenômenos que apresentam taxa de crescimento ou decrescimento constante podem ser modelados usando-se uma função exponencial. A nota média dos candidatos nessa questão foi baixa, evidenciando a dificuldade que muitos alunos do ensino médio têm em compreender o conceito de função exponencial. Infelizmente, erros na conversão de 0,5% para 0,005 também foram comuns.

**7.** Um abajur de tecido tem a forma de um tronco de cone circular reto, com bases paralelas. As aberturas do abajur têm 25 cm e 50 cm de diâmetro, e a geratriz do tronco de cone mede 30 cm. O tecido do abajur se rasgou e deseja-se substituí-lo.

**a)** Determine os raios dos arcos que devem ser demarcados sobre um novo tecido para que se possa cortar um revestimento igual àquele que foi danificado.

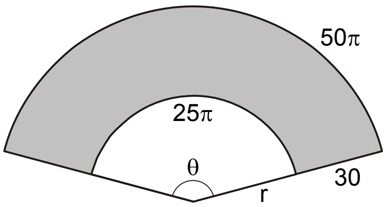
**b)** Calcule a área da região a ser demarcada sobre o tecido que revestirá o abajur.

## Resposta Esperada

a) **(3 pontos)**

O tecido utilizado para cobrir o abajur tem a forma de um setor de uma coroa circular, como indicado na figura. O arco interno tem comprimento igual ao comprimento da circunferência da base menor do tronco de cone, ou seja, $r\theta = 25\pi$. O arco externo tem comprimento igual ao comprimento da circunferência da base maior do tronco de cone, ou seja, $(r+30)\theta = 50\pi$. Assim, temos $25\pi + 30\theta = 50\pi$, ou $\theta = 5\pi/6$. Logo, o comprimento do raio do arco interno é igual a $r = 25\pi/(5\pi/6) = 30\text{cm}$, e o raio externo vale $R = r + 30 = 60\text{cm}$.

**Resposta: o raio interno tem 30 cm e o raio externo tem 60 cm.**

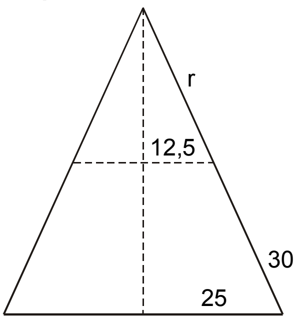



a')

Um corte vertical do cone fornece o triângulo isósceles ao lado. Observando o triângulo retângulo cuja base é igual ao raio da abertura maior do abajur, constatamos que este é semelhante ao triângulo retângulo cuja base é igual ao raio da abertura menor. Dada a semelhança dos triângulos, podemos escrever $\dfrac{25}{12{,}5} = \dfrac{r+30}{r}$.

Assim, 12,5$r$ = 12,5.30, ou $r$ = 30 $cm$. Logo, $R = r + 30 = 60\text{cm}$.

**Resposta: o raio interno tem 30 cm e o raio externo tem 60 cm.**



b) **(2 pontos)**

A área de tecido é igual à diferença entre as áreas dos setores circulares. O setor maior tem área igual a $\theta R^2/2 = (5\pi/6)\times 60^2/2 = 1500\pi$ cm², enquanto a área do setor menor é $\theta r^2/2 = (5\pi/6)\times 30^2/2 = 375\pi$ cm². Logo, a área de tecido é igual a $(1500 - 375)\pi = 1125$ $\pi$ cm².

**Resposta: a área de tecido necessária para cobrir o abajur é igual a 1125π cm².**

b')

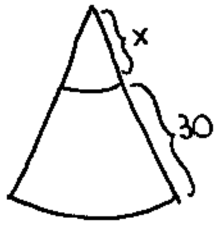
A área lateral do cone maior é dada por $A_G = \pi R_B G$, onde $G$ é a geratriz do cone e $R_B$ é o raio da base. Assim, $A_G = \pi.25.60 = 1500\pi$ cm². Da mesma forma, para o cone menor temos $A_P = \pi r_B g = \pi.12{,}5.30 = 375\pi$ cm².

Logo, a área de tecido é igual a $A_G - A_P = (1500 - 375)\pi = 1125\pi\ \text{cm}^2$.

**Resposta: a área de tecido necessária para cobrir o abajur é igual a 1125π cm².**

## Exemplo Acima da Média

a)




$$\frac{x}{\cancel{25}_{2}} = \frac{x+30}{\cancel{50}_{2}}\ 2$$

$x = 30\text{cm}$

$r_1 = 30\text{cm}$

$r_2 = x + 30 = 30 + 30 = 60\text{cm}$

R: $\boxed{\begin{array}{l} r_1 = 30\text{cm} \\ r_2 = 60\text{cm} \end{array}}$

b) $\frac{30}{60} = K \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

Para área $K^2 = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = \frac{A}{\pi . R . g}$$

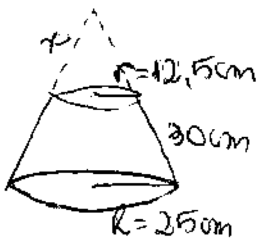
$A = \frac{\pi . R . g}{4} \Rightarrow A = \frac{\pi . 25 . \cancel{60}^{15}}{\cancel{4}} \Rightarrow A = 375\pi\ \text{cm}^2$

$X = 1500\pi - 375\pi$

R: $\boxed{X = 1125\pi\ \text{cm}^2}$

## Exemplo Abaixo da Média

a)




Os raios são as metades dos diâmetros, portanto:

$d = 25\text{ cm} \rightarrow r = 12{,}5\text{ cm}$

$D = 50\text{ cm} \rightarrow R = 25\text{ cm}$

Resp: Os raios deverão ser de 12,5cm e 25cm.

b) $\dfrac{x}{12{,}5} = \dfrac{30+x}{25}$ $\qquad A = \pi R g h$

$25x = 375 + 12{,}5x$

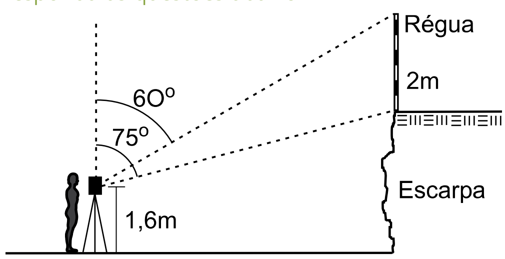
$12{,}5x = 375$

$x = 30\text{cm}$

## Comentários

Questão que combina geometria plana e espacial em um problema contextualizado. A resolução envolvia a modelagem da situação proposta, possivelmente visualizada por meio dos esboços do tronco de cone e de sua planificação. A grande maioria dos candidatos teve dificuldades em sua resolução, especialmente na planificação do cone, no relacionamento entre as medidas e no reconhecimento do raio de um arco. A nota média ficou em torno de 1, um valor muito abaixo do esperado.

**8.** De uma praia, um topógrafo observa uma pequena escarpa sobre a qual foi colocada, na vertical, uma régua de 2m de comprimento. Usando seu teodolito, o topógrafo constatou que o ângulo formado entre a reta vertical que passa pelo teodolito e o segmento de reta que une o teodolito ao topo da régua é de 60°, enquanto o ângulo formado entre a mesma reta vertical e o segmento que une o teodolito à base da régua é de 75°. Sabendo que o teodolito está a uma altura de 1,6m do nível da base da escarpa, responda às questões abaixo.



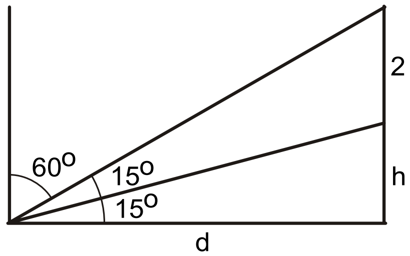

**a)** Qual a distância horizontal entre a reta vertical que passa pelo teodolito e a régua sobre a escarpa?

**b)** Qual a altura da escarpa?

## Resposta Esperada

a) **(3 pontos)**

Definamos *d* como a distância horizontal entre o teodolito e a régua, e *h* como a diferença entre a altura da escarpa e a altura do teodolito, que é de 1,6m. Observando a figura abaixo, constatamos que $\tan(15°) = h/d$ e $\tan(30°) = (h+2)/d$.




Como $\tan(15°) = \tan(45° - 30°) = \dfrac{\tan(45°) - \tan(30°)}{1 + \tan(45°)\tan(30°)} = 2 - \sqrt{3}$, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} 2+h &= d\sqrt{3}/3 \\ h &= (2-\sqrt{3})d \end{cases}.$$

Subtraindo a segunda linha da primeira, obtemos $2 = (\sqrt{3}/3 - 2 + \sqrt{3})d$, ou $d = 3 + 2\sqrt{3}$.

**Resposta: a régua está a uma distância horizontal de** $3 + 2\sqrt{3} \cong 6,46$ **metros do teodolito.**

b) **(2 pontos)**

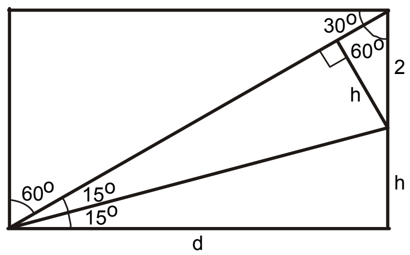
Como $h = (2 - \sqrt{3})d$, temos $h = (2 - \sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. Assim, a escarpa está a uma altura de $1,6 + \sqrt{3} \cong 3,3$ m.

**Resposta: a escarpa está a uma altura de** $1,6 + \sqrt{3} \cong 3,3$ **metros.**

b')

Definamos *d* como a distância horizontal entre o teodolito e a régua, e *h* como a diferença entre a altura da escarpa e a altura do teodolito, que é de 1,6m. Observando a figura ao lado, constatamos que $\text{sen}(60°) = h/2$, de modo que $h = 2\text{sen}(60°) = \sqrt{3}$.

**Resposta: a escarpa está a uma altura de** $1,6 + \sqrt{3} \cong 3,33$ **metros.**




a')

Com base na figura, também constatamos que $\tan(60°) = d/(2+h)$. Assim,

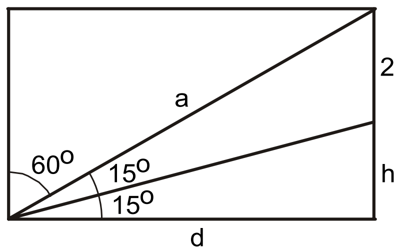
$d = (2+h)\tan(60°) = (2 + \sqrt{3})\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$.

**Resposta: a régua está a uma distância horizontal de** $3 + 2\sqrt{3} \cong 6,46$ **metros do teodolito.**

b'')

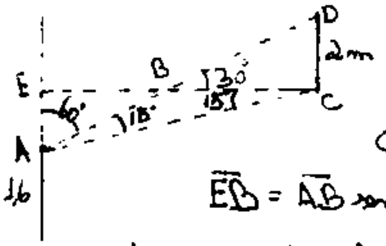
Seja dada a figura ao lado. Pelo teorema da bissetriz interna, temos $\dfrac{d}{a} = \dfrac{h}{2}$. Como $\dfrac{d}{a} = \cos(30°)$, obtemos $h = 2\cos(30°) = \sqrt{3}$. Assim, a altura da escarpa é igual a $1,6 + \sqrt{3} \cong 3,33$ m.

**Resposta: a escarpa está a uma altura de** $1,6 + \sqrt{3} \cong 3,3$ **metros.**




## Exemplo Acima da Média

a)



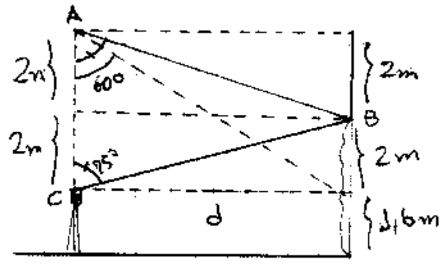

ABC é isósceles;
$BC = \frac{2}{tg30} = 2\sqrt{3}$
Como $BC = BA \rightarrow BA = 2\sqrt{3}$
$EB = AB$ sen $60° = 3$

A distância entre a vertical e a escarpa é $EB + BC$ =
$\cancel{2\sqrt{3}+3\,m}$ $2\sqrt{3} + 3\,m$

b) A altura da escarpa é $1,6 + AE$
$AE = AB \cos 60° = \sqrt{3}$
Logo a altura da escarpa é $1,6+\sqrt{3}$ m

## Exemplo Abaixo da Média

a,b)




Do desenho, observa-se que o triângulo ABC é isósceles.

b) Altura h da escarpa

$h = 2 + 1,6$

$\boxed{h = 3,6\,m}$

a) $\cancel{\text{(todos } 60°\text{)}}$

$tg60° = \frac{d}{4}$

$d = \sqrt{3} \cdot 4\ m$

$\therefore\ \boxed{d = 4\sqrt{3}\ m}$

Respostas:

a) $4\sqrt{3}\,m$

b) $3,6\,m$

## Comentários

Questão ligada à realidade, combinando a formulação de problemas com trigonometria e geometria plana. Respondida por poucos candidatos, essa questão poderia ser resolvida facilmente, e de diversas maneiras, sem necessitar do cálculo da tangente de quinze graus nem do emprego de fórmulas trigonométricas mais sofisticadas, valorizando a habilidade geométrica dos estudantes. Como o enunciado não explicitava que a resposta deveria ser expressa na forma racionalizada, apareceram diversas expressões equivalentes, e corretas, para a distância horizontal.

**9.** Sejam dados: a matriz $A = \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, o vetor $b = \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e o vetor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

**a)** Encontre o conjunto solução da equação $\det(A) = 0$.

**b)** Utilizando o maior valor de $x$ que você encontrou no item (a), determine o valor de $m$ para que o sistema linear $Ay = b$ tenha infinitas soluções.

## Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

$$\det(A) = -2(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^2 - (x-1)^2 - 2(x-1) + 2(x-1)^2 = 4(x-1)^2 - 4(x-1)$$

. Assim, temos a equação $4(x-1)(x-2) = 0$, cujas raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

**Resposta: as soluções da equação são $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.**

b) **(3 pontos)**

A maior raiz é 2, de modo que o sistema desejado tem a forma $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = m \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 3 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 = 5 \end{cases}$.

Para escalonar o sistema, multiplicamos a primeira linha por −1 e a somamos às demais linhas, obtendo $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = m \\ y_3 = 3 - m \\ -3y_3 = 5 - m \end{cases}$.

Para que esse sistema tenha solução, é preciso que as duas últimas equações sejam compatíveis, ou seja, $y_3 = 3 - m$ e $-3y_3 = 5 - m$. Assim, temos $-3(3-m) = 5 - m$, ou $4m = 14$, ou ainda $m = 7/2$. Neste caso, teremos um sistema com três incógnitas, mas apenas duas equações linearmente independentes, de modo que haverá infinitas soluções.

**Resposta: para que o sistema tenha infinitas soluções, é preciso que $m = 7/2$.**

## Exemplo Acima da Média

a) $\begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$-4(x-1) + 4(x-1)^2 = 0 \Rightarrow +4(x-1)(-1+x-1) = 0$

$x = 1$ ou $x = 2$ $\boxed{S = \{1; 2\}}$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = m \quad (I) \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 3 \quad (II) \\ y_1 + y_2 - 2y_3 = 5 \quad (III) \end{cases}$$

$(II)+(III)\; 2y_1 + 2y_2 = 8$

$y_1 + y_2 = 4$

$(II) \rightarrow 4 + 2y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = -1/2$

$(I) \rightarrow \underbrace{y_1 + y_2}_{4} + \underbrace{y_3}_{-1/2} = m \quad \therefore \boxed{m = \frac{7}{2}}$

## Exemplo Abaixo da Média

a) Pelo Teorema de Sarrus, tem-se:

$-[(x-1)\cdot 1\, \cancel{(x-1)}] - [(x-1)\cdot 1 \cdot 2] - [(x-1)\, \cancel{(x-1)}(-2)] + [(x-1)(1)(-2)] +$

$+ [(x-1)\, 1\, \cancel{(x-1)}] + [(x-1)\, \cancel{(x-1)}\, (2)] = 0$

$-[(x-1)(2)] + [(x-1)(-2)] = -(2x-2) + (-2x+2) = -4x+4 =$

$-4x + 4 = 0$
$-4x = -4 \rightarrow x = 1$

b) $A \cdot y = b$

$$\begin{bmatrix} 0 + 0 + 0 \\ 0 + y_2 + 2y_2 \\ 0 + y_3 - 2y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3y_2 \\ -y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow m = 0$$

## Comentários

Considerada difícil, essa questão envolve os tópicos de sistemas lineares, determinantes e polinômios com coeficientes reais. Observou-se que, na resolução do item **b**, muitos alunos utilizaram a regra de Cramer equivocadamente. Também ficou evidente a dificuldade que os estudantes têm para operar com números fracionários.

**10.** Sabe-se que a reta $r(x) = mx + 2$ intercepta o gráfico da função $y = |x|$ em dois pontos distintos, *A* e *B*.

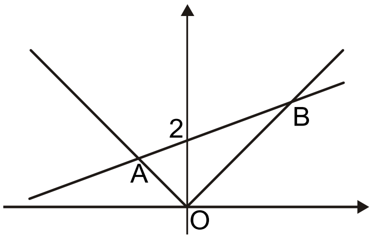
**a)** Determine os possíveis valores para *m*.

**b)** Se *O* é a origem dos eixos cartesianos, encontre o valor de *m* que faz com que a área do triângulo *OAB* seja mínima.

## Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Conforme ilustrado na figura abaixo, os gráficos da reta e da função $|x|$ se interceptam em um ponto A com abscissa negativa, e em um ponto B com abscissa positiva.




As coordenadas do ponto A podem ser obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} y = -x \\ y = mx + 2 \end{cases} \Rightarrow mx + 2 = -x \Rightarrow x = -\frac{2}{m+1} \Rightarrow y = \frac{2}{m+1}.$$

Como $x < 0$ e $y > 0$, devemos ter $m + 1 > 0$, de modo que $m > -1$.

Já as coordenadas do ponto B são obtidas a partir do sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = mx + 2 \end{cases} \Rightarrow mx + 2 = x \Rightarrow x = \frac{2}{1-m} \Rightarrow y = \frac{2}{1-m}.$$

Uma vez que, nesse caso, $x > 0$ e $y > 0$, devemos ter $1 - m > 0$, ou $m < 1$.

**Resposta: Para que haja interseção em dois pontos distintos, é preciso que $-1 < m < 1$.**

b) **(3 pontos)**

Como se observa, o triângulo AOB é retângulo, de modo que sua área é dada por $S = d(O,A) \cdot d(O,B)/2$. Como $d(O,A) = \sqrt{\frac{(-2)^2}{(m+1)^2} + \frac{2^2}{(m+1)^2}} = \sqrt{\frac{8}{(m+1)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1+m}$ e $d(O,B) = \sqrt{\frac{2^2}{(1-m)^2} + \frac{2^2}{(1-m)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1-m}$,

temos $S = \frac{4}{(m+1)\cdot(1-m)} = \frac{4}{1-m^2}$.

Assim, para que *S* seja mínima, é preciso que $1 - m^2$ assuma seu valor máximo, o que acontece quando $m = 0$.

**Resposta: a área do triângulo será mínima para m = 0.**

b')

Dadas as coordenadas dos três vértices do triangulo AOB, a área deste pode ser obtida a partir de

$$S = \frac{1}{2}\left| \det\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2}{m+1} & \frac{2}{m+1} & 1 \\ \frac{2}{1-m} & \frac{2}{1-m} & 1 \end{bmatrix} \right) \right| = \frac{4}{(m+1)\cdot(1-m)} = \frac{4}{1-m^2}.$$

Assim, para que *S* seja mínima, é preciso que $1 - m^2$ assuma seu valor máximo, o que acontece quando $m = 0$.

**Resposta: a área do triângulo será mínima para m = 0.**

b") O eixo *Oy* divide o triângulo *OAB* em dois triângulos. Supondo que estes triângulos estão deitados, observamos que suas bases são comuns e têm comprimento 2. Além disso, suas alturas são iguais aos valores absolutos das abscissas dos pontos *A* e *B*, respectivamente. Assim, teremos $S = \frac{2\cdot|2/(m+1)|}{2} + \frac{2\cdot[2/(1-m)]}{2} = \frac{4}{1-m^2}$.

Para que *S* seja mínima, é preciso que $1 - m^2$ assuma seu valor máximo, o que acontece quando $m = 0$.

**Resposta: a área do triângulo será mínima para m = 0.**

## Exemplo Acima da Média

a. $m\cdot x+2=|x|$

$\boxed{x\geq 0}$

$mx+2=x$

$x(1-m)=2$

$x=\frac{2}{1-m} \Rightarrow m\neq 1 \Rightarrow 1-m>0$

$m<1$

$\boxed{x<0}$

$mx+2=-x$

$x(1+m)=-2$

$x=\frac{-2}{1+m} \Rightarrow m\neq -1 \Rightarrow 1+m>0$

$m>-1$

$S=\{-1<m<1\}$

b. $A\left(\frac{2}{1-m},\frac{2}{1-m}\right)$ ; $B\left(-\frac{2}{1+m},\frac{2}{1+m}\right)$ ; $O(0,0)$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{1-m} & \frac{2}{1-m} & 1 \\ -\frac{2}{1+m} & \frac{2}{1+m} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\left[\frac{4}{1-m^2}+\frac{4}{1-m^2}\right] = \frac{8}{1-m^2}$$

$A=\frac{4}{1-m^2} \Rightarrow$ Amín. ⇒ denominador máximo ~~⇒ m do vértice~~

~~$1-m^2=0$~~

~~$m_v=-\frac{b}{2a}=$~~

$1-m^2>0$

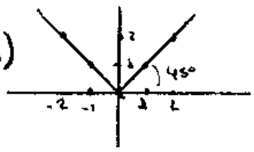
$m^2<1 \Rightarrow m^2-1<0$


$m_v=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2}=0$

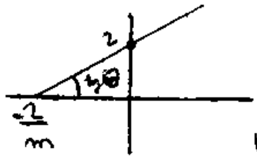
Resp: $m=0 \Rightarrow$ Amínima.

## Exemplo Abaixo da Média

a)




$y=|x|$




$r(x)=mx+2$

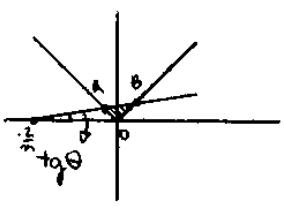
$r(0)=2$

$r(x)=0 \quad x=-\frac{2}{m}$

$tg\theta=m$

$tg45° > tg\theta > tg0°$ $\boxed{1>m>0}$

b)




$m=tg\theta$

menor valor
A △ABO

$\boxed{m=tg\,1°}$

## Comentários

Esta questão exige conhecimentos sobre funções e seus gráficos, bem como sobre a caracterização de pontos de mínimo e máximo, além de alguns conceitos básicos de geometria analítica. O desempenho dos candidatos ficou muito aquém do esperado, tendo sido elevado o número de pessoas que deixaram a questão em branco. A nota predominante foi o zero. Os alunos tiveram muitas dificuldades em lidar com a função valor absoluto e o seu gráfico, bem como posicionar retas no plano euclidiano. Foram raros os casos em que o candidato foi capaz de trabalhar com a noção de mínimo e máximo de uma função simples. Como o assunto é bastante relevante, tem-se a impressão de que os temas abordados nesta questão não estão recebendo a atenção devida nas escolas.

**11.** Um triângulo retângulo de vértices *A*, *B* e *C* é tal que $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{AB} = 8$ cm e $\overline{BC} = 10$ cm. Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ também são lados de quadrados construídos externamente ao triângulo *ABC*. Seja *O* o centro da circunferência que circunscreve o triângulo e sejam *D*, *E* e *F* os centros dos quadrados com lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

**a)** Calcule os comprimentos dos segmentos $\overline{DO}$, $\overline{EO}$ e $\overline{FO}$.

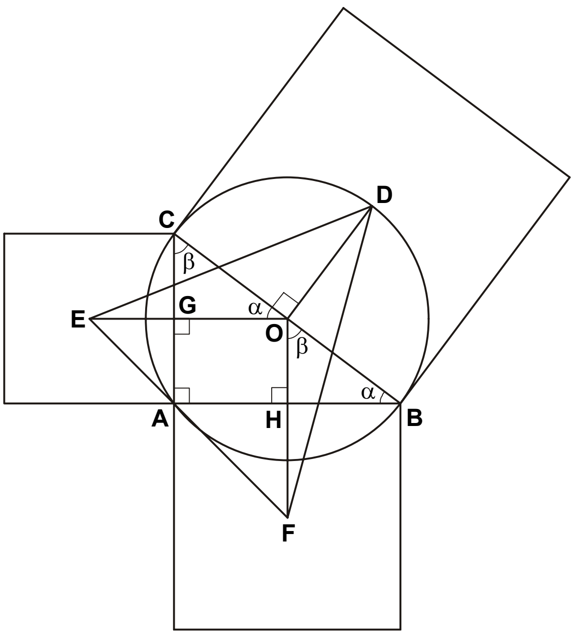
**b)** Calcule os comprimentos dos lados do triângulo de vértices *D*, *E* e *F*.

## Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

A figura abaixo ilustra o triângulo, a circunferência a ele circunscrita e os quadrados. Uma vez que o triângulo é retângulo, o ponto *O* é o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$. Como *D* é o centro do quadrado de lado $\overline{BC}$, temos $DO = CO = BC/2 = 5$ cm. Como os triângulos *ABC* e *GOC* são semelhantes e $CO = BC/2$, devemos ter GO = AB/2 = 4. Além disso, como *E* é o centro do quadrado de aresta $\overline{AC}$, temos $EG = AC/2 = 3$. Assim, $EO = EG + GO = 7$ cm. Repetindo o raciocínio para o triângulo *OHB* e o quadrado de aresta $\overline{AB}$, obtemos $OH = AC/2 = 3$ e $HF = AB/2 = 4$, de modo que $FO = OH + HF = 7$ cm.

**Resposta: *DO* = 5 cm, *EO* = 7 cm e *FO* = 7 cm.**



b) **(3 pontos)**

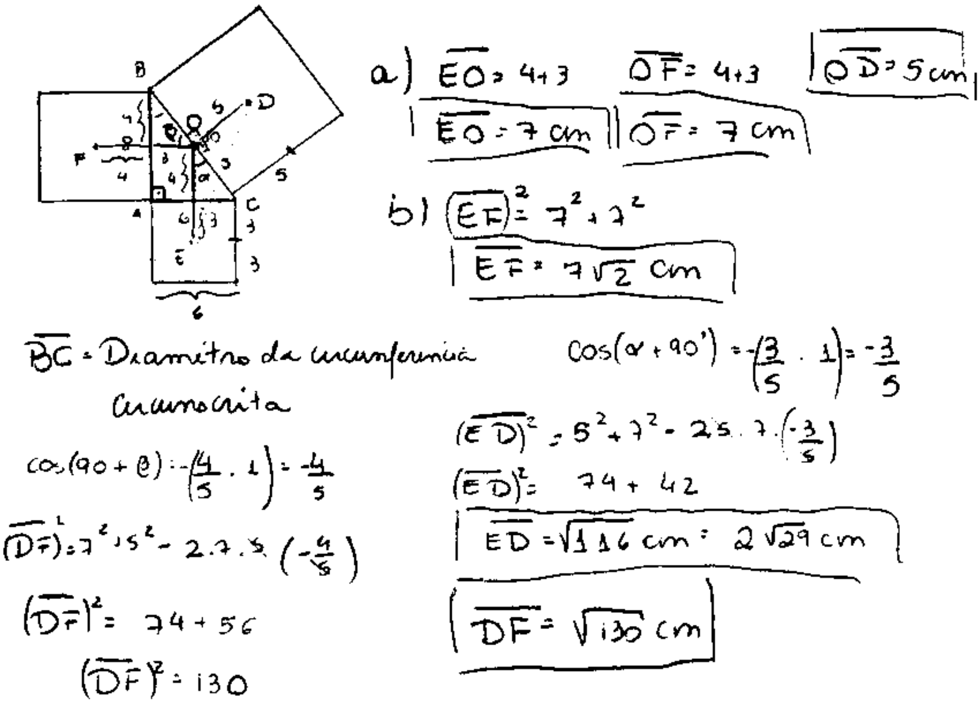
Como o triângulo *EOF* é retângulo e isósceles, temos $FE = EO\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ cm. Para calcular *DF* e *DE*, usamos a lei dos co-senos:

$$
\begin{aligned}
DE^2 &= 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\cos(\alpha + 90°) \\
&= 74 + 70\,\text{sen}(\alpha) = 74 + 70.6/10 = 116 = 4.29
\end{aligned}
$$

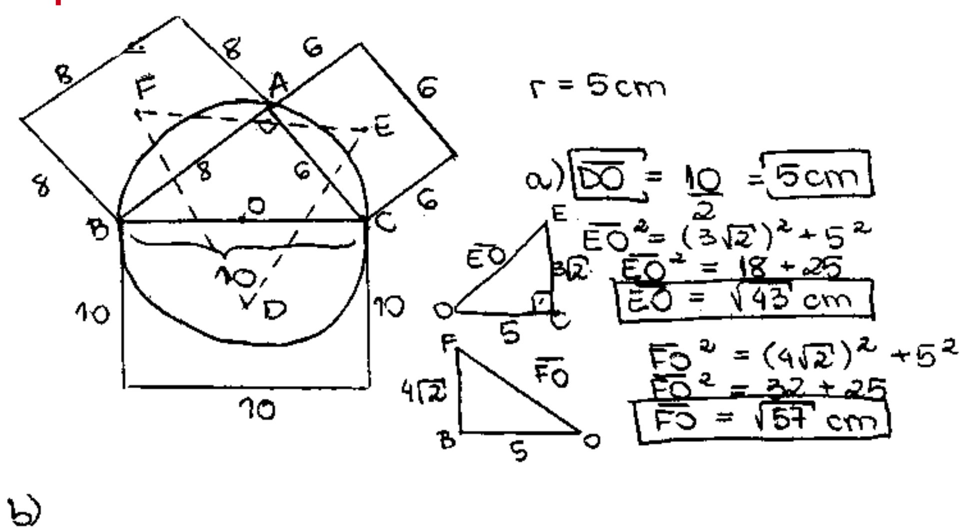
$$
\begin{aligned}
DF^2 &= 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\cos(\beta + 90°) \\
&= 74 + 70\,\text{sen}(\beta) = 74 + 70.8/10 = 130
\end{aligned}
$$

**Resposta:** ***FE*** **=** $7\sqrt{2}$ **cm,** ***DE*** **=** $2\sqrt{29}$ **cm e** ***DF*** **=** $\sqrt{130}$ **cm.**

## Exemplo Acima da Média




## Exemplo Abaixo da Média



## Comentários

Esta questão, considerada difícil, aborda temas de geometria plana, exigindo dos vestibulandos conhecimentos sobre as propriedades métricas das figuras geométricas. A solução dada acima é uma das muitas possíveis (e semelhantes). Muitos candidatos encontraram dificuldades para visualizar o círculo e os quadrados mencionados no enunciado. A lei dos co-senos, necessária para a resolução do item **b**, não parece ser suficientemente explorada no ensino médio, pois poucas pessoas tentaram obter os comprimentos dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$.

**12.** As três raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 12x - q = 0$, onde $q$ é um parâmetro real, formam uma progressão aritmética.

**a)** Determine $q$.

**b)** Utilizando o valor de $q$ determinado no item (a), encontre as raízes (reais e complexas) da equação.

## Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como as raízes $x_1$, $x_2$ e $x_3$ formam uma progressão aritmética, podemos escrever $x_1 = x_2 - r$ e $x_3 = x_2 + r$. Para determinar $q$, vamos usar a relação de Girard $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Nesse caso, temos $x_2 - r + x_2 + x_2 + r = 3x_2 = 3$, de forma que $x_2 = 1$. Substituindo essa raiz na equação, obtemos $1^3 - 3.1^2 + 12.1 - q = 0$, de modo que $q = 10$.

**Resposta: $q$ = 10.**

b) **(3 pontos)**

Levando em conta que $x_2 = 1$ e $q = 10$, podemos escrever a equação na forma $(x - 1)(x^2 - 2x + 10) = 0$. Assim, para encontrar as raízes que faltam, basta resolver a equação $x^2 - 2x + 10 = 0$. As raízes são, portanto, $x_1 = 1 - 3i$ e $x_3 = 1 + 3i$.

**Resposta: as raízes são $x_1 = 1 - 3i$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1 + 3i$.**

b')

Como as raízes $x_1$, $x_2$ e $x_3$ formam uma progressão aritmética, podemos escrever $x_1 = x_2 - r$ e $x_3 = x_2 + r$. Para determinar as raízes, vamos usar as relações de Girard $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 12$. Da primeira, obtemos $x_2 = 1$. Da segunda, concluímos que $r^2 = -9$, de modo que $r = \pm 3i$. Adotando $r = 3i$, obtemos $x_1 = 1 - 3i$ e $x_3 = 1 + 3i$.

**Resposta: as raízes são $x_1 = 1 - 3i$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1 + 3i$.**

a')

Para determinar $q$, vamos usar a terceira relação de Girard $x_1x_2x_3 = q$. Assim, $q = (1 - 3i)(1 + 3i) = 0$.

**Resposta: $q$ = 10.**

## Exemplo Acima da Média

a) Sejam $x_1, x_2$ e $x_3$ as raízes da equação. Como estão em PA, temos que $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2 + 2x_2 = \frac{-(-3)}{1} \Leftrightarrow x_2 = 1$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_3 + x_1x_3 = \frac{12}{1} \Leftrightarrow 2x_2 + x_1x_3 = 12$

$\Leftrightarrow x_1x_3 = 12 - 2 \Leftrightarrow x_1x_3 = 10$

$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \Leftrightarrow 10 \cdot 1 = \frac{-(-q)}{1} \Leftrightarrow \boxed{q = 10}$

b) Do item anterior, já temos que $x_2 = 1$. Sendo $r$ a razão da PA, podemos dizer que $x_1x_2x_3 = \frac{-(-10)}{1} \Leftrightarrow (x_2 - r)(x_2 + r) = 10$

$\Leftrightarrow 1^2 - r^2 = 10 \Leftrightarrow r^2 = -9 \Leftrightarrow r = \pm 3i$. Assim, teremos que $x_1 = 1 - 3i$ e $x_3 = 1 + 3i$. Portanto:

$V = \{1 - 3i;\ 1;\ 1 + 3i\}$

## Exemplo Abaixo da Média

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 12$

$x_2 = x_1 \cdot q'$
$x_3 = x_1 \cdot q'^2$

$x_1 \cdot (x_1 \cdot q)(x_1 \cdot q'^2) = 12$
$x_1^3 \cdot q^3 = 12$

## Comentários

A última questão da prova foi de dificuldade média, exigindo dos candidatos conhecimentos sobre as fórmulas de Girard e a regra de Briot-Ruffini, bem como alguns fatos elementares sobre progressões aritméticas. Alguns dos erros mais comuns foram: assumir que a razão da progressão aritmética era igual a 1 e usar de maneira errada a regra de Briot-Ruffini (isto é, não calcular o resto, o que implica que qualquer número poderia ser raiz da equação em questão). Muitos candidatos também utilizaram fórmulas erradas para resolver equação de segundo grau. Outros erraram ao simplificar as expressões algébricas, escrevendo, por exemplo, *(2+6i)/2 = 1+6i*.