UNICAMP
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2007
vestibular nacional
UNICAMP

2ª Fase

Matemática

INTRODUÇÃO

A prova de matemática da segunda fase do vestibular da UNICAMP é elaborada de forma a identificar os candidatos com boa capacidade de leitura de textos, bom raciocínio abstrato e domínio dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e no ensino médio. Muitas questões abrangem mais de um tópico de matemática, de modo que é possível encontrar problemas que mesclam trigonometria com geometria plana, ou geometria e álgebra linear. Além disso, a maioria das questões envolve a aplicação da matemática à resolução de problemas cotidianos, exigindo do candidato a formulação de modelos que expressem matematicamente o problema.

Ao comentar a prova de matemática do vestibular 2007, decidimos apresentar estratégias alternativas de resolução das questões. Assim, sempre que um item vier acompanhado de um apóstrofo, como em **a’** ou **b’**, uma maneira diferente (e equivalente) de se obter a solução do problema é apresentada, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos leitores. Na maioria dos casos, os exemplos abaixo e acima da média ilustram erros comuns cometidos pelos candidatos ou formas alternativas de solucionar cada questão. O propósito desses exemplos e dos comentários que os seguem é auxiliar os futuros alunos da UNICAMP a evitar deslizes ao responder às questões.

1. "Pão por quilo divide opiniões em Campinas” (*Correio Popular*, 21/10/2006).

Uma padaria de Campinas vendia pães por unidade, a um preço de R$ 0,20 por pãozinho de 50 g. Atualmente, a mesma padaria vende o pão por peso, cobrando R$ 4,50 por quilograma do produto.

a) Qual foi a variação percentual do preço do pãozinho provocada pela mudança de critério para o cálculo do preço?

b) Um consumidor comprou 14 pãezinhos de 50 g, pagando por peso, ao preço atual. Sabendo que os pãezinhos realmente tinham o peso previsto, calcule quantos reais o cliente gastou nessa compra.

Resposta Esperada

a) (3 pontos)

Um quilograma de pãezinhos corresponde a 1000/50 = 20 unidades. Assim, o preço do quilograma de pãezinhos era igual a 0,20 x 20 = R$ 4,00. A diferença entre o preço novo e o antigo é de 4,50 – 4,00 = R$ 0,50 por quilograma, o que corresponde a um aumento de 0,50/4,00 = 0,125, ou 12,5%.

Resposta: houve uma variação de 12,5% no preço do pãozinho.

a’)

Um quilograma de pãezinhos corresponde a 1000/50 = 20 unidades. Assim, o preço atual do pãozinho equivale a R$ 4,50/20 = R$ 0,225. Por pão, a diferença entre o preço novo e o antigo é de 0,225 – 0,20 = R$ 0,025, o que corresponde a um aumento de 0,025/0,20 = 0,125, ou 12,5%.

Resposta: houve uma variação de 12,5% no preço do pãozinho.

b) (2 pontos)

O consumidor comprou 14/20 = 0,7 kg de pãezinhos. Assim, ele gastou 0,7 x 4,5 = R$ 3,15.

Resposta: o consumidor gastou R$ 3,15.

Exemplo Acima da Média

a) 0,2 reais $\rightarrow$ 50 g
x $\rightarrow$ 1 000 g $\Rightarrow$ $x = 4$ reais

antes $\rightarrow$ R$ 4,00 o quilo
agora $\rightarrow$ R$ 4,50 o quilo $\Rightarrow$ aumento de R$ 0,50

4 reais $\rightarrow$ 100%
0,5 reais $\rightarrow$ x $\Rightarrow$ $\boxed{x = 12,5\%}$

O aumento foi de 12,5 %

b) 14 . 50 = 700 g $\Rightarrow$ R$ 4,50 $\rightarrow$ 1 000 g
x $\rightarrow$ 700

$\Rightarrow$ $\boxed{x = \text{R\$ } 3,15}$

O cliente gastou R$ 3,15 na compra

Exemplo Abaixo da Média

a) 1 pão — R$ 0,20 — p = 50g sistema antigo
R$ 4,50 — 1kg = 1000g sistema atual

R$ 4,50 —— 1000g
p —— 50g

$p = \frac{50 \cdot 4,50}{1000} \rightarrow p = 0,22 \rightarrow$ 1 pão = R$ 0,22

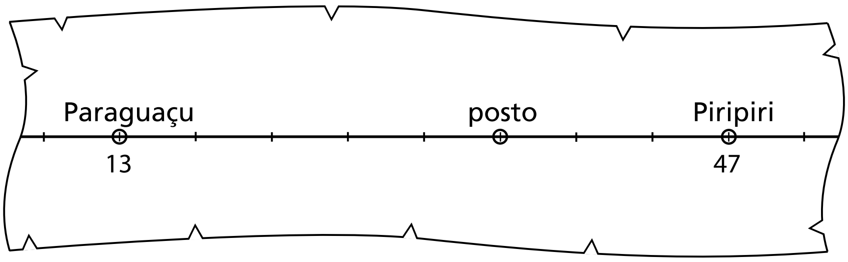
Se um pão custava R$ 0,20, agora custa R$ 0,22 a variação foi de 10%.

b) 1 pão custa R$ 0,22
Se o consumidor comprou 14, então:
14 pães × R$ 0,22 = R$ 3,08 $\boxed{\text{Gastou R\$ 3,08}}$

Comentários

Esta é uma questão muito fácil, que visa apenas verificar se os candidatos conseguem formular o problema matematicamente e efetuar contas simples. O exemplo abaixo da média ilustra um erro freqüentemente encontrado durante a correção das provas do vestibular. Nele, o candidato arredonda R$0,225 para R$0,22, obtendo 10% como resposta para o item **a**, em lugar de 12,5%, e R$3,08 em lugar de R$3,15 no item **b**. Embora não seja possível pagar R$0,225 por um pão de 50g, pois não há moeda de meio centavo, o freguês deve pagar R$2,25, e não R$2,20, por dez pães, de modo que não se deve desprezar os décimos de centavo ao efetuar as contas.

2. A figura abaixo mostra um fragmento de mapa, em que se vê o trecho reto da estrada que liga as cidades de Paraguaçu e Piripiri. Os números apresentados no mapa representam as distâncias, em quilômetros, entre cada cidade e o ponto de início da estrada (que não aparece na figura). Os traços perpendiculares à estrada estão uniformemente espaçados de 1 cm.



a) Para representar a escala de um mapa, usamos a notação 1: X, onde X é a distância real correspondente à distância de 1 unidade do mapa. Usando essa notação, indique a escala do mapa dado acima.

b) Repare que há um posto exatamente sobre um traço perpendicular à estrada. Em que quilômetro (medido a partir do ponto de início da estrada) encontra-se tal posto?

c) Imagine que você tenha que reproduzir o mapa dado usando a escala 1: 500000. Se você fizer a figura em uma folha de papel, qual será a distância, em centímetros, entre as cidades de Paraguaçu e Piripiri?

Resposta Esperada

a) (2 pontos)

A distância real entre as cidades é de 47 – 13 = 34 km. No mapa, as cidades estão a 8 cm de distância. Assim, cada centímetro do mapa corresponde a 34/8 km, ou 4,25 km reais. Logo, a escala é 1:425.000.

Resposta: A escala é 1:425.000.

b) (2 pontos)

No mapa, o posto está a 5 cm de Paraguaçu. A distância real é de 5 x 4,25 = 21,25 km. Logo, o posto está a 21,25 + 13 = 34,25 km do início da estrada.

Resposta: o posto está no quilômetro 34 (ou 34,25) da estrada.

c) (1 ponto)

Na escala 1:500.000, as cidades serão desenhadas a 3400000/500000 = 34/5 = 6,8 cm.

Resposta: as cidades serão desenhadas a uma distância de 6,8 cm.

Exemplo Acima da Média

a) $47-13=34$ Km

34 Km — 8 cm
x — 1 cm

$x = \frac{34}{8} = 4{,}25$ Km

1 cm : $4{,}25$ Km

1 cm : 425.000 cm

$\boxed{1:425.000}$

$4{,}25$ Km $=$ 425.000 cm

b) A distância Real entre as cidades é 34 Km, e a distância no mapa é 8 cm.

Logo: 1 cm $= 4{,}25$ Km

∴ O posto se encontra no quilômetro $34{,}25$.

Como o posto se encontra no 5 cm, então devemos somar $5 \times 4{,}25 = 21{,}25$ Km a 13 Km

c) $1:500.000$

↳ 1 cm — 5 Km
y — 34 Km

↳ distância entre as cidades

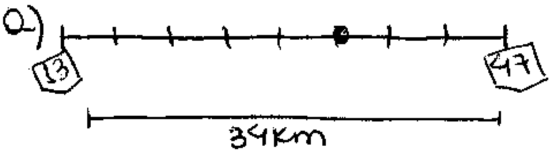
$y = \frac{34}{5} = 6{,}8$

R: A distância seria de $6{,}8$ cm.

Exemplo Abaixo da Média

Aproximando

a)



$34 \div 8$ unidades de 1 cm
$= 4{,}2$ Km pra cada 1 cm
$1 : 4{,}2$ cm/Km

b) $4{,}2 \cdot 5 = 21{,}0$ andou depois do Km 13
$13 + 21 =$ quilômetro 34 está o posto

c) escala é $1:500.000$
cm 1 — 500.000 Km
cm x — 47 Km
47 — $500.000\,x$

$\frac{47}{5 \cdot 10^5} = \frac{9{,}6}{10^5}$

$x = 9{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm
entre Paraguaçu e Piripiri

Comentários

Nesta questão simples, o candidato precisa trabalhar com o conceito de proporcionalidade e com conversão de unidades. Um dos erros mais comuns foi a conversão errada de quilômetros para centímetros (e vice-versa). Também houve quem apresentasse a escala na forma 1:4,25, ou arredondasse 4,25 para 4,2, obtendo um resultado errado. O exemplo abaixo da média ilustra a combinação desses dois últimos erros. Muitos candidatos não perceberam que o número que representa a escala de um mapa é adimensional, ou seja, não tem unidade, de modo que não seria adequado escrever 1:425.000 cm ou 1:425.000 km.

3. Por norma, uma folha de papel A4 deve ter 210mm x 297mm. Considere que uma folha A4 com 0,1mm de espessura é seguidamente dobrada ao meio, de forma que a dobra é sempre perpendicular à maior dimensão resultante até a dobra anterior.

a) Escreva a expressão do termo geral da progressão geométrica que representa a espessura do papel dobrado em função do número *k* de dobras feitas.

b) Considere que, idealmente, o papel dobrado tem o formato de um paralelepípedo. Nesse caso, após dobrar o papel seis vezes, quais serão as dimensões do paralelepípedo?

Resposta Esperada

a) (2 pontos)

A espessura dobra a cada dobra do papel. Como a espessura inicial é de 0,1 mm, teremos $e_k = 0{,}1 \times 2^k$.

Resposta: o termo geral da progressão é descrito por $e_k = 0{,}1 \times 2^k$.

b) (3 pontos)

Após a sexta dobra a espessura será igual a $e_6 = 0{,}1 \times 2^6 = 0{,}1 \times 64 = 6{,}4$ mm. Cada uma das demais dimensões será dividida por $2^3 = 8$, de modo que teremos 210 / 8 = 26,25 mm e 297 / 8 = 37,125 mm.

Resposta: as dimensões serão: 37,125 mm, 26,25 mm e 6,4 mm.

Exemplo Acima da Média

A) 1ª Dobra → espessura de 0,2 mm / no final)
2ª Dobra → espessura de 0,4 mm "
3ª Dobra → espessura de 0,8 mm

PG $\left(\underset{K=0}{0{,}1}\ ;\ \underset{K=1}{0{,}2}\ ;\ \underset{K=2}{0{,}4}\ ;\ \underset{K=3}{0{,}8}\ ;\ \dots\ \underset{K=n-1}{a_n}\right)$

~~Dx~~= TERMO GERAL (a_K) $a_K = 0{,}1 \cdot 2^K$

o RESPOSTA: Para o termo geral "a_K", temos: $a_K = 0{,}1 \cdot 2^K$.

B) $K = 6 \rightarrow a_6 = 0{,}1 \cdot 2^6$ $a_6 = 0{,}1 \cdot 64$ $a_6 = 6{,}4$ mm

Em 6 dobras, o papel terá seu comprimento reduzido à metade 3 vezes, assim como sua largura, logo:

$\frac{210}{2^3} = \frac{210}{8} = 26{,}25$mm e $\frac{297}{2^3} = \frac{297}{8} = 37{,}125$ mm

o RESPOSTA: Dimensões → 37,125 mm × 26,25 mm × 6,4 mm, sendo (comprimento × largura × espessura).

Exemplo Abaixo da Média

a. Dobras 1 2 3 4
Espessura 0,2 0,4 0,8 0,16

A espessura E: $E = (0,2)^n$

O termo geral é $\boxed{E = (0,2)^n}$

b.

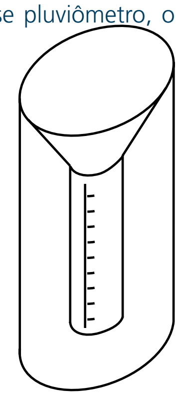
Dobras	0	1	2	3	4	5	6
Largura	210	210	105	105	52,5	52,5	26,25
Comprimento	297	148,5	148,5	74,25	74,25	37,1025	37,1025
Espessura	0,1	0,2	0,4	0,8	0,16	0,32	0,64

As dimensões são $\boxed{26,25 \text{ mm} \times 37,1025 \text{ mm}}$ e espessura $\boxed{0,64 \text{mm}}$

Comentários

Trata-se de uma aplicação de progressão geométrica a um problema real simples. A enumeração das dimensões após cada dobra foi muito utilizada pelos candidatos para obter a solução desta questão. Entretanto, as pessoas que usam esse tipo de estratégia precisam estar cientes de que ela aumenta não só o tempo de resolução, como as chances de que surjam erros nas contas. Assim, é preciso conferir os resultados ao final, verificando se o termo geral encontrado é compatível com os primeiros termos da progressão e se, multiplicando por 8 a largura e o comprimento obtidos após a sexta e última dobra, obtemos as dimensões originais. Por fim, fica no ar uma curiosidade: quantas vezes ainda seria possível dobrar a folha de papel A4?

4. Um pluviômetro é um aparelho utilizado para medir a quantidade de chuva precipitada em determinada região. A figura de um pluviômetro padrão é exibida ao lado. Nesse pluviômetro, o diâmetro da abertura circular existente no topo é de 20 cm. A água que cai sobre a parte superior do aparelho é recolhida em um tubo cilíndrico interno. Esse tubo cilíndrico tem 60 cm de altura e sua base tem 1/10 da área da abertura superior do pluviômetro. (Obs.: a figura ao lado não está em escala).



a) Calcule o volume do tubo cilíndrico interno.

b) Supondo que, durante uma chuva, o nível da água no cilindro interno subiu 2 cm, calcule o volume de água precipitado por essa chuva sobre um terreno retangular com 500 m de comprimento por 300 m de largura.

Resposta Esperada

a) (2 pontos)

A abertura superior tem área igual a $\pi.(20/2)^2 = 100\pi$ cm^2. A área da base do tubo é 1/10 da área dessa abertura, ou seja, 10π cm^2. Assim, o volume do tubo é igual a 60 x $10\pi = 600\pi$ cm^3.

Resposta: o tubo tem 600π cm^3.

b) (3 pontos)

O volume recolhido no tubo é igual a 2 x $10\pi = 20\pi$ cm^3. O terreno tem 500 x 300 = 150.000 m^2 = 15.10^8 cm^2. Se, em uma área de 100π cm^2, o volume precipitado foi de 20π cm^3, o volume precipitado sobre o terreno foi de $(20\pi / 100\pi)$ x $15.10^8 = 3.10^8$ cm^3 = 300 m^3.

Resposta: ocorreu uma precipitação de 300 m^3 de chuva sobre o terreno.

b’)

O terreno tem 500 x 300 = 150.000 m². Como a área da abertura superior é igual a 10 vezes a área do cilindro interno, a altura do nível d’água seria igual a 0,02/10 = 0,002m, caso a área da base do cilindro interno fosse igual à área da abertura superior. Assim, o volume precipitado sobre o terreno foi de 150.000 x 0,002 = 300 m³.

Resposta: ocorreu uma precipitação de 300 m³ (ou 3.10⁸ cm³, ou 300.000 litros) de chuva sobre o terreno.

Exemplo Acima da Média

a) $S_{b(TUBO)} = \frac{1}{10} \cdot S_{b(TOPO)} \Rightarrow S_{b(TUBO)} = \frac{1}{10} \cdot \pi \cdot \overbrace{r^2_{(TOPO)}}^{10\,cm} = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \pi \cdot \cancel{10} \cdot 10$

$S_{b(TUBO)} = 10\pi\, cm^2$.

DAÍ: $V_{TUBO} = S_b \cdot h = 10\pi \cdot 60 = 600\pi\, cm^3$

$\boxed{V_{TUBO} = 600\pi\, cm^3}$

b) SUPONDO QUE A CHUVA CAIA DE FORMA HOMOGÊNEA, TEMOS:

$V_{OCUPADO\ NO\ CILINDRO} = 10\pi \cdot 2 = \boxed{20\pi\, cm^3}$ ⇒ ESSE VOLUME DE ÁGUA CAI DE FORMA HOMOGÊNEA NA BOCA DO TUBO.

∴ A ALTURA QUE SUBIRIA NO CILINDRO COM AS DIMENSÕES DA BOCA É A ALTURA QUE SUBIRIA EM TODO O TERRENO:

$V = A_b \cdot h \Rightarrow 2\cancel{0}\cancel{\pi} = \cancel{\pi} \cdot 10\cancel{0} \cdot h \Rightarrow \boxed{h = 0{,}2\, cm}$

DAÍ: VOLUME DE ÁGUA PRECIPITADA ⇒ $V_p = A_b \cdot h = 5 \cdot 10^4 cm \cdot 3 \cdot 10^4 cm \cdot 0{,}2\, cm$

$\boxed{V = 3 \cdot 10^8 cm^3 = 3 \cdot 10^5 L}$

Exemplo Abaixo da Média

A-)) Primeiro, calcula-se a área da abertura cir-
cular do topo. Depois, divide ela por 10, e
se terá a area da base do tubo cilíndrico
interno. Assim, calcula-se o volume, pela fórmu-
la: 60cm x Área base cilindro interno = Volume, em cm^3

B) Área Terreno = 150.000 m^2

Calcula-se o volume que se representa a quantidade
chovida (2cm x Área base cilindro interno). Essa quanti-
dade de chuva caiu sobre a Área da abertu-
ra circular do topo. Com os numeros em mãos,
usa-se uma regra simples de 3 e x calcula a qtd de chuva.

Comentários

À semelhança da questão 2, este exercício envolve proporcionalidade, mas agora usando áreas e volumes. Há diversas maneiras de se obter a resposta desta questão, mas preferimos apresentar apenas as duas mais comuns. O exemplo acima da média ilustra a resolução alternativa do item **b**. Os erros na conversão de cm^2 para m^2 e de cm^3 para m^3 foram muito freqüentes. Muitos candidatos também esqueceram de fornecer as unidades. O exemplo abaixo da média ilustra uma nota zero. Nele, o candidato escreve um texto longo "explicando" o que deve ser feito, sem apresentar qualquer conta ou resultado.

5. Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 15,00 o quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo corretas as informações da pesquisa e definindo a receita do restaurante como o valor total pago pelos clientes.

a) Em que caso a receita do restaurante será maior: se o preço subir para R$18,00 / kg ou para R$ 20,00 / kg?

b) Formule matematicamente a função f(x), que fornece a receita do restaurante como função da quantia x, em reais, a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição.

c) Qual deve ser o preço do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Resposta Esperada

a) (2 pontos)

Se o preço subir para R$ 18,00 / kg, o que corresponde a um aumento de R$ 3,00 / kg, o consumo de comida baixará para 100 – 3 x 5 = 85 kg. Nesse caso, o restaurante terá uma receita de 18 x 85 = R$ 1530,00. Se o preço chegar aos R$ 20,00 / kg, ou seja, se o aumento for de R$ 5,00 / kg, o consumo descerá para 100 – 5 x 5 = 75 kg. Neste caso, a receita será de 20 x 75 = R$ 1500,00.

Resposta: a receita será maior se o preço subir para R$ 18,00 o quilograma.

b) (1 ponto)

A receita é igual ao produto do preço pela quantidade de comida vendida, ou seja, $f(x) = (15 + x)(100 - 5x) = 1500 + 25x - 5x^2$.

Resposta: $f(x) = (15 + x)(100 - 5x)$ ou $f(x) = 1500 + 25x - 5x^2$.

c) (2 pontos)

Os zeros de f(x) são x = –15 e x = 100/5 = 20. Como f(x) é uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo, seu valor máximo ocorre quando x = [–15 + 20] / 2 = 2,5. Assim, a receita será máxima quando o quilo de comida custar 15 + 2,50 = R$ 17,50.

Resposta: a maior receita será obtida com um preço de R$ 17,50 por quilograma de comida.

c')

Como $f(x) = 1500 + 25x - 5x^2$ é uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo, seu valor máximo ocorre quando x = -25 / [2.(–5)] = 2,5. Assim, a receita será máxima quando o quilo de comida custar 15 + 2,5 = R$ 17,50.

Resposta: a maior receita será obtida com um preço de R$ 17,50 por quilograma de comida.

Exemplo Acima da Média

a) De 15 reais para 18 reais = aumento de 3 reais
3 reais × 5kg = 15kg → 1kg — R$18,00
100K − 15Kg = 85Kg   85Kg — x ⇒ x = R$1530//

15 → 20 = 5 reais × 5kg = 25kg ⇒ 100 − 25 ⇒ vende 75kg
1Kg — 20 reais
75Kg — x ⇒ x = 1500 reais// R: Se o preço subir para R$18,00//

b) $f(x) = [100 - (x.5)].(15+x)$
$f(x) = [100 - 5x].(15+x)$
$f(x) = 1500 + 100x - 75x - 5x^2$
$f(x) = -5x^2 + 25x + 1500$
$f(x) = -x^2 + 5x + 300$//

c) $y = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{-(25 - 4.(-1).300)}{-4} = \frac{(25+1200)}{4} = \frac{1225}{4} = 306{,}25$
↳ máximo

$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-5}{2.(-1)} \Rightarrow x = \frac{-5}{-2} \Rightarrow x = 2{,}5$// ⇒ aumento

Preço = 15 reais + 2,5 = R$ 17,50//

Exemplo Abaixo da Média

a) R$ 18,00 → vende 85Kg → lucra 85 x 18 = $\boxed{\text{R\$ 1540}}$

R$ 20,00 → vende 75 kg → lucra 75 x 20 = $\boxed{\text{R\$ 1500}}$

A receita será maior com o preço de R$ 18,00/Kg.

b) f(x) = 100 - 5x . 15 + x

15 → preço padrão

x → acréscimo de preço

x → acréscimo de preço

5x → quilos perdidos

100 → venda padrão

f(x) → receita

c) x = 1

f(1) = 100 - 5.1 . 15 + 1

f(1) = 95 . 16

$\boxed{\text{f(1) = R\$ 1520}}$

x = 2

f(2) = 100 - 5.2 . 15 + 2

f(2) = 90 . 17

$\boxed{\text{f(2) = 1530 reais}}$

x = 4

f(4) = 100 - 5.4 . 15 + 4

f(4) = 80 . 19

$\boxed{\text{f(4) = R\$ 1520}}$

O preço deve ser de R$ 18,00/Kg para se ter uma maior receita (R$ 1540) como mostrado no item A.

Comentários

Esta é uma típica aplicação de um polinômio de segundo grau para descrever um problema real. A grande maioria dos candidatos foi capaz de responder ao item **a**, embora muitos não tenham percebido como usar o raciocínio aplicado nesse item para responder ao restante da questão. No exemplo acima da média, apresentamos um erro freqüentemente cometido ao se responder ao item **b**. Não é correto dizer que as funções $f(x) = 1500 + 25x - 5x^2$ e $g(x) = 300 + 5x - x^2$ são iguais ou equivalentes. Assim, ao apresentar essa última função, o candidato acabou reduzindo a um quinto a receita do restaurante. Por outro lado, é possível usar g(x) para resolver o item **c**, pois, nesse caso, só estamos interessados nas raízes do polinômio.

No exemplo abaixo da média, encontramos uma expressão errada para f(x), já que, sem os parênteses, a função apresentada torna-se $f(x) = 100 - 74x$. Além disso, observamos, nessa prova, que enumerar os valores de f(x) nos casos em que x é um número inteiro não é uma maneira eficiente de se obter o ponto de máximo da função, uma vez que x pode assumir qualquer valor real.

6. Dois prêmios iguais serão sorteados entre dez pessoas, sendo sete mulheres e três homens. Admitindo que uma pessoa não possa ganhar os dois prêmios, responda às perguntas abaixo.

a) De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos entre as dez pessoas?

b) Qual é a probabilidade de que dois homens sejam premiados?

c) Qual é a probabilidade de que ao menos uma mulher receba um prêmio?

Resposta Esperada

a) (1 ponto)

O número de maneiras diferentes é dado por $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.8.7.6.5.4.3.2.1} = 45$.

Resposta: existem 45 maneiras diferentes de distribuir os prêmios.

b) (2 pontos)

As maneiras diferentes de distribuir os prêmios por dois homens são dadas por $C_3^2 = \binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{3.2.1}{2.1.1} = 3$.

Deste modo, a probabilidade é de 3/45 ou 1/15, o que corresponde a, aproximadamente, 6,67%.

Resposta: A probabilidade é igual a 1/15, ou cerca de 6,67%.

b’)

A probabilidade de que o primeiro prêmio seja dado a um homem é de (3/10). A probabilidade de que o segundo prêmio saia para um homem é de (2/9). Assim, a probabilidade dos dois prêmios serem dados a homens é de (3/10)x(2/9) = 6/90 = 1/15, o que corresponde a, aproximadamente, 6,67%.

Resposta: A probabilidade é igual a 1/15, ou cerca de 6,67%.

c) (2 pontos)

Os únicos casos em que uma mulher não recebe algum prêmio são aqueles nos quais dois homens são beneficiados. Assim, a probabilidade desejada é de 1 – 1/15 = 14/15, ou cerca de 93,33%.

Resposta: A probabilidade é igual a 14/15, ou 93,33%.

c’)

Se ao menos uma mulher recebeu um prêmio, podemos ter as seguintes situações: o primeiro prêmio foi para um homem e o segundo para uma mulher, o primeiro prêmio foi para uma mulher e o segundo para um homem e, finalmente, os dois prêmios foram dados a mulheres. Assim, teremos as seguintes probabilidades (7/10)x(3/9) = 7/30, (3/10)x(7/9) = 7/30 e (7/10)x(6/9) = 14/30. Somando esses valores, chegamos a 28/30 = 14/15, ou cerca de 93,33%.

Resposta: A probabilidade é igual a 14/15, ou 93,33%.

Exemplo Acima da Média

a) O número de maneiras diferentes que os prêmios podem ser distribuídos entre os dez é:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10.9.8!}{2.8!} = 45 \text{ maneiras diferentes}$$

b) Sejam os dois prêmios, prêmio A e prêmio B.

A probabilidade de um homem ser sorteado para o prêmio A é: $\frac{3}{10}$

A probabilidade de outro homem ser sorteado para o prêmio B é: $\frac{2}{9}$

Logo a probabilidade de dois homens serem sorteados é: $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$

c) É o total menos a probabilidade de dois homens serem sorteados:

$$\frac{15}{15} - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

A probabilidade de uma mulher ser tirada para um dos prêmios pelo menos é $\frac{14}{15}$

Exemplo Abaixo da Média

a) 2 prêmios
10 pessoas
sem repetição

$\underset{1^{\circ}\text{ prêmio}}{10} \quad \underset{2^{\circ}\text{ prêmio}}{9} = 90$ maneiras

Resp: 90 maneiras diferentes.

b) P = ?
2 homens serem premiados (A)

$P(A) = 3!$
$P(A) = 3.2.1$
$P(A) = 6$

Resp: A propabilidade é de 3!.

c) P(B) = ?
ao menos uma mulher ganhar o prêmio. (B)

4 mulheres
3 homens

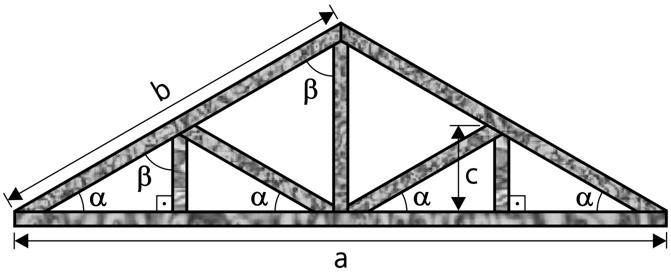
$P(B) \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$
$\quad 4 \quad 3 = 21$

Resp: A propabilidade é de 21.

Comentários

Esta é uma questão simples sobre contagem e probabilidade. Muitos candidatos, ignorando o fato de que uma mesma pessoa não poderia receber os dois prêmios, usaram fórmulas de arranjo, em lugar de combinação, como ocorre no exemplo abaixo da média. Valores maiores que 1 também foram fornecidos com freqüência como resposta aos itens **b** e **c**, sugerindo que o conceito de probabilidade não foi perfeitamente assimilado por boa parte dos alunos do ensino médio.

7. Na execução da cobertura de uma casa, optou-se pela construção de uma estrutura, composta por barras de madeira, com o formato indicado na figura abaixo.



Resolva as questões abaixo supondo que $\alpha = 15°$. **Despreze a espessura das barras** de madeira e não use aproximações nos seus cálculos.

a) Calcule os comprimentos b e c em função de a, que corresponde ao comprimento da barra da base da estrutura.

b) Assumindo, agora, que a = 10m, determine o comprimento total da madeira necessária para construir a estrutura.

Resposta Esperada

a) (3 pontos)

Como cos(α) = (a / 2) / b, temos b = a / [2.cos(15º)]. Observa-se, na figura, que os quatro triângulos retângulos pequenos são iguais, tendo, cada um, base com comprimento igual a a/4 e altura igual a c. Então, notando que tg(α) = c / (a / 4), concluímos que c = a.tg(15º) / 4.

cos(15º) = cos(45º – 30º) = cos(45º)cos(30º) + sen(45º)sen(30º) = $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2)+(\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$.

sen(15º) = sen(45º – 30º) = sen(45º)cos(30º) – cos(45º)sen(30º) = $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2)+(\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$.

tg(15º) = sen(15º) / cos(15º) = $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. Logo, $b = 2a/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ e $c = a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/[4(\sqrt{6}+\sqrt{2})]$.

Resposta: $b = 2a/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ **e** $c = a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/[4(\sqrt{6}+\sqrt{2})]$.

a')

Pela lei dos cossenos, temos $a^2 = b^2 + b^2 - 2.b.b.\cos(150º) = 2b^2\,[1 - \cos(150º)]$. Sabendo que cos(150º) = cos(90º+60º), obtemos cos(150º) = cos(90º)cos(60º) – sen(90º)sen(60º) = $-\sqrt{3}/2$.

Desta forma, $a^2 = 2b^2[1+\sqrt{3}/2]$. Logo, $b^2 = \dfrac{a^2}{2+\sqrt{3}} = a^2(2-\sqrt{3}) = \dfrac{a^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}$.

Ou seja, $b = a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$.

Usando Pitágoras e semelhança de triângulos, escrevemos $(b/2)^2 = (a/4)^2 + c^2$.

Assim, $c^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 = \dfrac{a^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16} - \dfrac{a^2}{16} = a^2\dfrac{(7-4\sqrt{3})}{16} = \dfrac{a^2(2-\sqrt{3})^2}{16}$.

Logo, $c = a\left(2-\sqrt{3}\right)/4$

Resposta: $b = a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$ **e** $c = a(2-\sqrt{3})/4$.

b) (2 pontos)

A estrutura tem uma barra de comprimento a, duas barras de comprimento b, duas barras de comprimento (b/2), duas barras de comprimento c e uma barra de comprimento 2c. Assim, o comprimento total será igual a a + 2b + 2(b/2) + 2c +2c, ou a + 3b + 4c. Isso equivale a

$$10+\frac{3.20}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}+\frac{4.10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = 10+\frac{60+10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{60+20\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

Resposta: O comprimento total é igual a $\dfrac{60+20\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$ metros.

b')

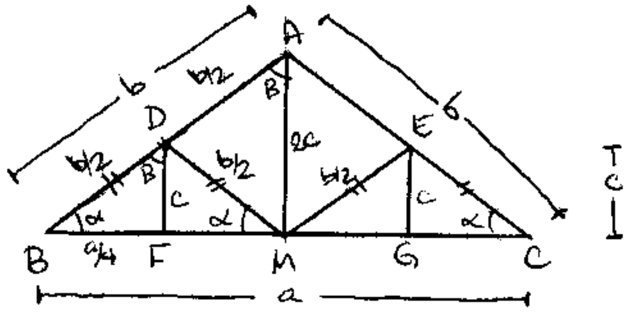
A estrutura tem uma barra de comprimento a, duas barras de comprimento b, duas barras de comprimento (b/2), duas barras de comprimento c e uma barra de comprimento 2c. Assim, o comprimento total valerá a + 2b + 2(b/2) + 2c +2c, ou a + 3b + 4c. Isso equivale a

$$a\left[1+\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})\right] = \frac{a}{2}\left(6+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right) = 5\left(6+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$$

Resposta: O comprimento total é igual a $5\left(6+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ metros.

Matemática

Exemplo Acima da Média



$\cancel{\text{sen}}\ \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$

$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \text{sen } 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ$

$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a) $\cos \alpha = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}$

$\cos 15^\circ = \frac{a/2}{b}$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{a}{2b}$

$\boxed{b = \frac{2a}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}).a}{2}}$

$\cancel{\text{sen}}$ $TG\ 15^\circ = TG(60^\circ - 45^\circ)$

$TG\ 15^\circ = \frac{TG 60^\circ - TG 45^\circ}{1 + TG 60^\circ . TG 45^\circ}$

$TG\ 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow TG\ 15^\circ = \frac{c}{a/4}$

$\boxed{c = \frac{a}{4}.(2-\sqrt{3})}$

b) Se $a = 10$, então total de madeira (T)

$T = a + 3b + 4c = 10 + \frac{3.(\sqrt{6}-\sqrt{2})a}{2} + \frac{4a(2-\sqrt{3})}{\cancel{4}}$

$T = \frac{20 + 3a\sqrt{6} - 3a\sqrt{2} + 4a - 2\sqrt{3}a}{2}$

$T = \frac{60 + 30\sqrt{6} - 30\sqrt{2} - 20\sqrt{3}}{2} = \boxed{30 + 15\sqrt{6} - 15\sqrt{2} - 10\sqrt{3} \text{ metros de madeira}}$

Exemplo Abaixo da Média

a) $\text{Sen}\,\alpha = \frac{a}{2b}$

$\text{Sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \text{Sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{a}{2b}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2b}$

$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{a}{2b}$

$b = \frac{8a}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$\boxed{b = a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}$

$\text{Cos}\,\alpha = 4c/a$

$\text{Cos} 45^\circ \text{Cos} 30^\circ + \text{Sen} 45^\circ \text{Sen} 30^\circ = 4c/a$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4c/a$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{4c}{a}$

$\boxed{C = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})a}{16}}$

b) $C_t = 4c + 2b + a$

$= \frac{10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{16}.4 + 2.10(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + 10$

$= \frac{10}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 20(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + 10$

$C_t = \left(\frac{90}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 10\right) m$

Comentários

Esta questão apresenta uma aplicação clara e direta da matemática à solução de um problema prático relevante. Ela exigia dos candidatos que relacionassem os comprimentos das barras e que usassem trigonometria para determinar a quantidade de madeira necessária à construção da treliça de um telhado. A julgar pela dificuldade dos candidatos em obter a resposta do exercício, tem-se a impressão de que as questões de trigonometria habitualmente exploradas no ensino médio reforçam apenas a memorização de fórmulas, sem contemplar aplicações a problemas reais. O exemplo acima da média mostra uma resolução bem feita, apesar de o termo tg não estar muito claro. No exemplo abaixo da média, o candidato trocou a expressão do seno pela do cosseno.

8. Seja dado o sistema linear:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

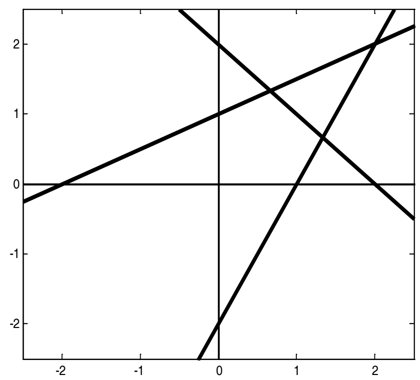
a) Mostre graficamente que esse sistema não tem solução. Justifique.

b) Para determinar uma solução aproximada de um sistema linear Ax = b impossível, utiliza-se o método dos quadrados mínimos, que consiste em resolver o sistema $A^TAx = A^Tb$. Usando esse método, encontre uma solução aproximada para o sistema dado acima. Lembre-se de que as linhas de M^T (a transposta de uma matriz M) são iguais às colunas de M.

Resposta Esperada

a) (2 pontos)

Resposta: Cada equação pode ser representada por uma reta no plano x_1x_2, como mostra o gráfico abaixo. Uma vez que as três retas não se interceptam em um único ponto, o sistema não tem solução.



b) (3 pontos)

A partir dos dados do problema, definimos:

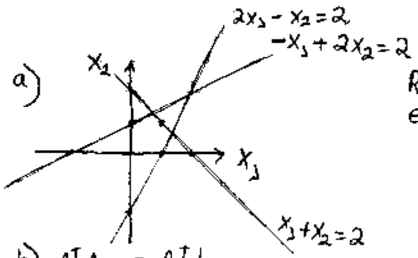
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

O sistema $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$ é equivalente a $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 4 \\ 4{,}5x_2 = 6 \end{cases}$, cuja solução é $x_1 = 4/3$, $x_2 = 4/3$.

Resposta: A solução de quadrados mínimos do sistema é $x_1 = 4/3$, $x_2 = 4/3$.

Exemplo Acima da Média

a)



Resposta: Para existir solução deveria existir apenas um ponto de interseção entre as três retas.

b) $A^T A x = A^T b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 4 \\ -6x_1 + 12x_2 = 8 \end{cases}$$
$$9x_2 = 12 \qquad x_2 = \frac{12}{9} \qquad x_2 = \frac{4}{3}$$

$$6x_1 = 4 + \cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{3}} \qquad 6x_1 = 8 \qquad x_1 = \frac{8}{6} \qquad x_1 = \frac{4}{3}$$

Resposta: $x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$

Exemplo Abaixo da Média

a) sendo $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, temos que $\det A = 0$, logo o sistema é possível e indeterminado ou é impossível. Como não existem respostas que satisfaçam esse sistema ele é impossível.

b) $$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot [x_1 \; x_2] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 4 \\ -2x_1 + 9x_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ -2x_1 + 9.(2 - 3x_1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{94}{29} \\ x_1 = \frac{-12}{29} \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-12}{29} \; ; \; x_2 = \frac{94}{29}}$$

Comentários

Nesta questão, pede-se aos candidatos que forneçam a interpretação geométrica de um sistema linear e que efetuem operações com matrizes. O número alto de provas nas quais este exercício foi deixado em branco evidenciou, mais uma vez, o despreparo dos alunos para a resolução de problemas aplicados. No exemplo abaixo da média apresentado acima, o candidato incluiu indevidamente uma coluna de zeros na matriz A. Em seguida, observou que a nova matriz tinha determinante nulo, o que é decorrência da inclusão da coluna de zeros. Ao final do item **a**, concluiu que o sistema não tem solução, sem explicar corretamente o porquê. Além disso, observa-se sua dificuldade em multiplicar matrizes e vetores, o que o impediu de acertar o item **b**. Já o exemplo acima da média está absolutamente correto, exceto pelo fato de que os eixos do gráfico não contêm qualquer identificação dos pontos nos quais as retas os interceptam.

9. Em um triângulo com vértices *A*, *B* e *C*, inscrevemos um círculo de raio r. Sabe-se que o ângulo $\hat{A}$ tem 90º e que o círculo inscrito tangencia o lado *BC* no ponto *P*, dividindo esse lado em dois trechos com comprimentos $\overline{PB} = 10$ e $\overline{PC} = 3$.

a) Determine r.

b) Determine $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

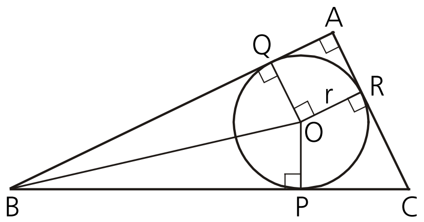
c) Determine a área da região que é, ao mesmo tempo, interna ao triângulo e externa ao círculo.

Resposta Esperada

a) (3 pontos)

Sabemos que BP = 10. Observamos, na figura abaixo, que os triângulos retângulos OPB e OQB têm a hipotenusa, OB, em comum. Além disso, os catetos OQ e OP são iguais. Assim, BQ = BP = 10. De forma análoga, como CP = 3, também temos CR = 3. Finalmente, AQ = AR, o que implica que o quadrilátero AQOR é um quadrado de aresta r. Como o triângulo ABC é retângulo, com hipotenusa BC, podemos escrever $(3 + r)^2 + (10 + r)^2 = 13^2$. Logo, $2r^2 + 26r – 60 = 0$, o que implica que r = 2 ou r = –15. Eliminando a raiz negativa, concluímos que r = 2.

Resposta: r = 2.



b) (1 ponto)

AB = r + BQ = 2 + 10 = 12. AC = r + CR = 2 + 3 = 5.

Resposta: AB = 12 e AC = 5.

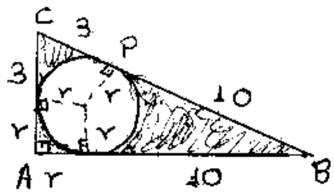
c) (1 ponto)

A área solicitada é dada por $A = A_T – A_C$, onde $A_T = AB.AC/2$ é a área do triângulo ABC e $A_C = \pi r^2$ é a área do círculo de raio r. Pelos dados obtidos nos itens (a) e (b), concluímos que $A_T = 12.5/2 = 30$ e $A_C = \pi 2^2 = 4\pi$. Logo, $A = 30 – 4\pi$.

Resposta: A área vale $30 – 4\pi$.

Exemplo Acima da Média

(a)



$(r+10)^2+(r+3)^2=13^2$

$r^2+20r+100+r^2+6r+9=169$

$2r^2+26r-60=0$

$r^2+13r-30=0$ → $r=-15$ ↳ não convém ; → $r=2$

$\boxed{r=2}$

(b) $AB = r+10 = 2+10 = 12$

$AC = r+3 = 2+3 = 5$

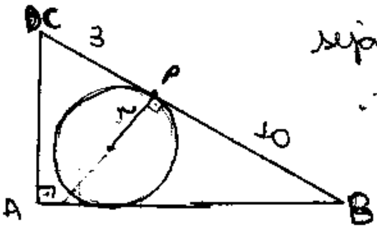
(c) $A = A_{triangulo} - A_{círculo}$

$A = \frac{12.5}{2} - \pi.2^2 = 30 - 4\pi$

$\boxed{A = 2.(15-2\pi)}$

Exemplo Abaixo da Média

a)



seja $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 30°$

$tg\,30° = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2r}{10} \Rightarrow$

$6r = 10\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{r = \frac{10\sqrt{3}}{6}}$

b) $(AB)^2 = (2r)^2 + (10)^2$

$(AB)^2 = \left(\frac{20\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 100$

$(AB)^2 = \frac{400.3}{36} + 100$

$AB = \sqrt{\frac{400}{3}}$

$(13)^2 = \left(\sqrt{\frac{400}{3}}\right)^2 + (AC)^2$

$169 = \frac{400}{3} + AC^2$

$\frac{507-400}{3} = AC^2$

$AC^2 = \sqrt{\frac{107}{3}}$

c)

Comentários

Esta questão, de dificuldade entre média e alta, aborda conceitos de geometria plana. Para responder a ela é imprescindível fazer uma figura ilustrando o problema e, nela, identificar que o quadrilátero AQOR é um quadrado. Circunferências inscritas que não tangenciam algum lado do triângulo e suposições erradas acerca dos ângulos internos deste triângulo foram erros comumente encontrados nas provas, como mostra o exemplo abaixo da média. Nesse exemplo, o candidato ainda afirma, erroneamente, que o segmento PA é perpendicular a PB, o que implicaria em PA ser a altura do triângulo.

10. O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0.2^{-bt}$, onde t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.

a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante b.

b) Dada uma concentração inicial P_0, de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de P_0. Considere $\log_2 10 \approx 3,32$.

Resposta Esperada

a) (2 pontos)

Se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, então $P(29) = P_0 / 2 = P_0.2^{-29b}$. Assim, temos $2^{-1} = 2^{-29b}$, ou b = 1/29.

Resposta: b = 1/29.

b) (3 pontos)

Seja T o tempo necessário para a concentração atingir 20% de P_0. Neste caso, $P(T) = P_0/5 = P_0.2^{-T/29}$, ou seja, $1/5 = 2^{-T/29}$. Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados da equação, obtemos $-\log_2 5 = -T/29$. Assim, $T = 29.\log_2 5 = 29.\log_2 10/2 = 29.(\log_2 10 - 1) \approx 29.2,32 = 67,28$ anos.

Resposta: são necessários 67,28 anos, aproximadamente.

Exemplo Acima da Média

(a) Para t = 29, temos:

$\frac{\cancel{P_0}}{2} = \cancel{P_0}.2^{-29b}$

$2^{-1} = 2^{-29b}$

$-1 = -29b \rightarrow \boxed{b = 1/29}$

R. A constante b vale 1/29. Assim, $P(t) = P_0.2^{-t/29}$

(b) Sendo $P(t) = 20\% P_0$, temos:

$\frac{20}{100}.\cancel{P_0} = \cancel{P_0}.2^{-t/29}$

$\frac{2}{10} = 2^{-t/29}$

$-\frac{t}{29} = \log_2 2/10$

$-\frac{t}{29} = \log_2 2 - \log_2 10$

$-\frac{t}{29} = 1 - 3,32$

$-\frac{t}{29} = -2,32$

$\boxed{t = 67,28 \text{ anos}}$

R. O tempo necessário é 67,28 anos, ou seja, 67 anos, 102 dias, 4 horas e 48 minutos.

Exemplo Abaixo da Média

a) $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$

$45 = 90 \cdot 2^{-b \cdot 29}$

$0{,}5 = 2^{-b29}$

$\frac{1}{2} = 2^{-b29}$

$2^{-1} = 2^{-b29}$ → $-b29 = -1$

$b = 1/29$

O valor de b é 1/29.

b) $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$

$20 = 90 \cdot 2^{-\frac{1}{29}t}$

Comentários

Esta questão tradicional sobre funções logarítmicas e exponenciais foi respondida, ainda que parcialmente, pela maioria dos candidatos. Houve mesmo quem desse a resposta em anos, dias, horas e minutos, como ilustra o exemplo acima da média. Naturalmente, essa precisão não era necessária. O exemplo abaixo da média apresenta uma confusão encontrada com freqüência: o candidato supôs que o número 90, que identificava apenas o isótopo do estrôncio, se referia à concentração inicial a ser usada nos cálculos. Muitas pessoas também interpretaram de forma errada o enunciado do item **b**, trocando 20% por 80%.

11. Seja dada a reta x – 3y + 6 = 0 no plano xy.

a) Se P é um ponto qualquer desse plano, quantas retas do plano passam por P e formam um ângulo de 45º com a reta dada acima?

b) Para o ponto P com coordenadas (2, 5), determine as equações das retas mencionadas no item (a).

Resposta Esperada

a) (1 ponto)

A reta x – 3y + 6 = 0 pode ser escrita como y = x/3 + 2. O coeficiente angular dessa reta é m = 1/3. Este coeficiente angular é igual a tan(α), sendo α o ângulo formado entre o eixo x e a reta dada. As retas que formam um ângulo de 45º com a reta dada são aquelas que têm coeficientes angulares a_1 = tan(α + 45º) e a_2 = tan(α – 45º). Apenas uma reta com coeficiente a_1 passa pelo ponto P, assim como é única a reta de coeficiente a_2 que passa por P.

Resposta: Existem duas retas que formam um ângulo de 45º com a reta dada.

b) (4 pontos)

A primeira reta tem coeficiente angular

$$a_1 = \tan(\alpha + 45°) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(45°)}{1 - \tan(\alpha)\tan(45°)} = \frac{\tan(\alpha) + 1}{1 - \tan(\alpha)} = \frac{4/3}{2/3} = 2\,.$$

Como essa reta passa por P = (2, 5), temos 5 = 2.2 + b_1, de modo que b_1 = 1. Logo, a reta é y = 2x + 1. A segunda reta é perpendicular à primeira, tendo, portanto, coeficiente angular igual a –1/(2) = –1/2. Como essa reta também passa por P, temos 5 = (–1/2).2 + b_2 , de forma que b_2 = 6. Logo, a reta é y = –x/2 + 6.

Resposta: As retas são y = 2x + 1 e y = –x/2 + 6.

b')

A figura ao lado mostra o vetor m, que é paralelo à reta dada, e o vetor M, que é perpendicular a m. O vetor a_1, que forma um ângulo de 45º com a m e com M, é paralelo a uma das retas desejadas. Esta reta tem, portanto, coeficiente angular igual a 4/2 = 2. Como a reta passa por P = (2, 5), temos (y – 5) = 2.(x – 2), ou y = 2x + 1. A segunda reta é perpendicular à primeira, tendo, portanto, coeficiente angular igual a –1/(2) = –1/2. Como essa reta também passa por P, concluímos que (y – 5) = (–1/2).(x – 2), ou y = –x/2 + 6.

Resposta: As retas são y = 2x + 1 e y = –x/2 + 6.

b'')

A figura ao lado mostra o vetor m, normal à reta dada, e o vetor M, que é perpendicular a m. O vetor a_1, que é normal a uma das retas desejadas, forma um ângulo de 45º com a m e com M. Assim, uma reta desejada tem a forma $4x – 2y + b_1 = 0$, de modo que $b_1 = 2$. Portanto, a reta é 4x – 2y + 2 = 0. A segunda reta é perpendicular à primeira, de forma que seu vetor normal é (2, 4). Usando o ponto P mais uma vez, obtemos $2.2 + 4.5 + b_2 = 0$, o que fornece $b_2 = –24$. Logo, temos 2x + 4y – 24 = 0.

Resposta: As retas são 4x – 2y + 2 = 0 e 2x + 4y – 24 = 0.

b''') A reta dada tem coeficiente angular m = 1/3. Se θ é o ângulo entre duas retas r e s, então $\tan(\theta) = \pm\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$. Para θ = 45º e $m_r = 1/3$, temos $1 = \pm\frac{(1/3) - m_s}{1 + m_s/3}$, ou seja, $3 + m_s = \pm(1 – 3m_s)$. Assim, $m_s = 2$ ou $m_s = –1/2$. Como as retas passam pelo ponto P = (2, 5), temos, no primeiro caso, (y – 5) = 2.(x – 2), ou y = 2x + 1, e, no segundo caso, (y – 5) = (–1/2).(x – 2), ou y = –x/2 + 6.

Resposta: As retas são y = 2x + 1 e y = –x/2 + 6.

Exemplo Acima da Média

a) $-3y = -x - 6 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \rightarrow m_r = 1/3$

$tg\,\theta = \frac{|m_r - m_s|}{|1 + m_r . m_s|} \Rightarrow tg\,45° = 1 = \frac{|1/3 - m_s|}{|1 + 1/3\, m_s|} \Rightarrow |1 + 1/3\, m_s| = |1/3 - m_s|$

① $1 + \frac{1}{3}m_s = \frac{1}{3} - m_s \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} = -m_s - \frac{1}{3}m_s \Rightarrow \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}m_s \Rightarrow m_s = -1/2$

② $1 + \frac{1}{3}m_s = -\frac{1}{3} + m_s \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{3}m_s \Rightarrow m_s = 2$

R: Já que existem dois possíveis coeficientes angulares para reta é possível afirmar que existem duas retas que passam P e formam 45° com a reta dada

b) $y = mx + q \longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + q$

$y = 2x + q$

$5 = 4 + q$

$q = 1 \rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$

$5 = -\frac{1}{2}.2 + q$

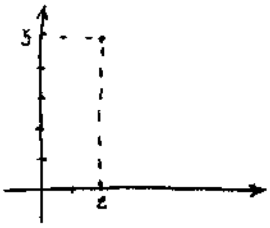
$q = 6 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + 6}$

Exemplo Abaixo da Média

a) Somente retas que tem $m: -3$ passam perpendiculares à reta dada do plano, logo são infinitas retas que tem $m = -3$.

$y = \frac{1}{3}x + \frac{6}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$ logo para ser $\perp \Rightarrow \underline{m' = -3!}$

b)



$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 5 = m(x - 2)$

Comentários

Esta questão de geometria analítica foi considerada difícil pelos candidatos, embora um bom número de pessoas tenha respondido corretamente ao item **a**. Seu objetivo era avaliar a habilidade dos alunos em associar os aspectos algébricos e geométricos do problema. Dentre os erros mais comuns, destacamos as afirmações de que

existiam infinitas retas que formavam um ângulo de 45° com a reta dada e que passavam pelo ponto P, e a afirmação de que retas perpendiculares entre si têm coeficientes angulares m e –m. No exemplo abaixo da média, o candidato não só preferiu encontrar o coeficiente angular da reta perpendicular à reta dada, algo que não era solicitado, como, por não usar o ponto P, concluiu que o número de retas era infinito.

12. Seja $ABCDA_1B_1C_1D_1$ um cubo com aresta de comprimento 6 cm e sejam M o ponto médio de BC e O o centro da face CDD_1C_1, conforme mostrado na figura ao lado.

a) Se a reta AM intercepta a reta CD no ponto P e a reta PO intercepta CC_1 e DD_1 em K e L, respectivamente, calcule os comprimentos dos segmentos CK e DL.

b) Calcule o volume do sólido com vértices A, D, L, K, C e M.

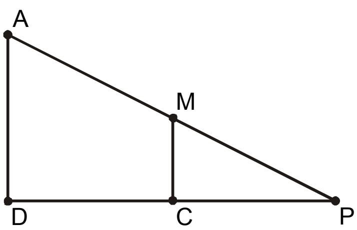
Resposta Esperada

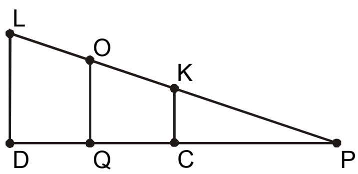
a) (3 pontos)

Sabemos que o comprimento da aresta AD é igual a 6 cm e que o segmento CM tem 3 cm, pois M é o ponto médio da aresta BC. A figura abaixo, à esquerda, mostra os triângulos semelhantes ADP e MCP. Com base nessa figura, concluímos que AD/DP = CM/CP, ou seja, que 6/(6 + CP) = 3/CP, de modo que CP = 6 cm.

Da figura abaixo, à direita, conhecemos OQ = QC = 3 cm, pois O é o centro da face CDD_1C_1, e CP = 6 cm. Como os triângulos retângulos dessa figura são semelhantes, podemos escrever CK/CP = OQ/QP, ou seja, CK/6 = 3/9. Daí, CK = 2 cm. Da mesma forma, observamos que LD/DP = OQ/QP, ou seja, LD/12 = 3/9. Desta forma, LD = 4 cm.

Resposta: CK = 2 cm e LD = 4 cm.





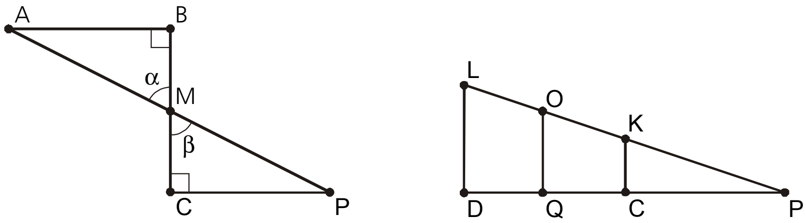
a')

A figura abaixo, à esquerda, mostra os triângulos ABM e MCP. Os segmentos CM e BM têm 3 cm, pois M é o ponto médio da aresta BC. Por serem opostos pelo vértice, os ângulos α e β são iguais.

Além disso, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são retos. Assim, concluímos que CP = AB = 6 cm.

Da figura abaixo, à direita, conhecemos OQ = QC = 3 cm, pois O é o centro da face CDD_1C_1, e CP = 6 cm. Como os triângulos retângulos dessa figura são semelhantes, podemos escrever CK/CP = OQ/QP, ou seja, CK/6 = 3/9. Daí, CK = 2 cm. Da mesma forma, observamos que LD/DP = OQ/QP, ou seja, LD/12 = 3/9. Desta forma, LD = 4 cm.

Resposta: CK = 2 cm e LD = 4 cm.



a")

Observando a figura dada no enunciado, reparamos que os triângulos ADL e MCK são semelhantes. Assim, temos a relação DL/6 = CK/3, ou DL = 2CK. Além disso, como O é o ponto médio da face CDD_1C_1, cujas arestas têm comprimento 6 cm, podemos concluir que DL + CK = 6 cm. Logo, 3CK = 6, ou seja, CK = 2cm, o que implica que DL = 4cm.

Resposta: CK = 2 cm e LD = 4 cm.

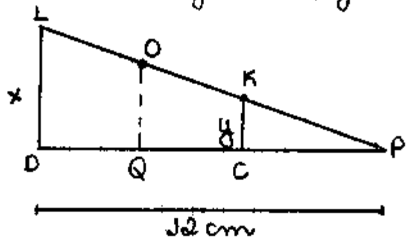
b) (2 pontos)

O sólido desejado é o tronco de uma pirâmide de base triangular. A pirâmide maior, de vértices A, D, L e P, tem base com área A_G = AD.DL/2 = 6.4/2 = 12 cm^2. Uma vez que a altura dessa pirâmide é DP = 12 cm, seu volume é V_G = A_G.DP/3 = 12.12/3 = 48 cm^3. A pirâmide menor, de vértices C, K, M e P, tem base com área A_p = CM.CK/2 = 3.2/2 = 3 cm^2. Como essa pirâmide tem altura CP = 6 cm, seu volume é V_p = A_p.CP/3 = 3.6/3 = 6 cm^3. O volume desejado é dado por $V_G - V_p$ = 48 – 6 = 42 cm^3.

Resposta: O sólido tem volume igual a 42 cm^3.

Exemplo Acima da Média

a) Os triângulos ABM e MCP são opostos pelo vértice e apresentam as mesmas medidas. Disso temos: $\overline{CP}=6$ e $\overline{DP}=12cm$. Observe os triângulos a seguir.



$\overline{OQ}=3cm$ (porque O é o centro)
$\overline{DQ}=3cm$
$\overline{QP}=9cm$

ΔDLP é semelhante ao ΔOQP

$\frac{x}{3}=\frac{12}{9}$

$x=4cm$

ΔDLP é semelhante ao ΔKCP

$\frac{4}{y}=\frac{12}{6}$

$y=2cm$

Resposta: $\overline{CK}$ vale 2 cm e DL vale 4cm.

b) Volume da pirâmide ADLP − Volume da pirâmide MCKP

$\frac{6\cdot 4}{2}=12cm^2\cdot 12cm=\frac{144cm^3}{3}=48cm^3$

$\frac{3\cdot 2}{2}=3cm^2\ 6cm=\frac{18cm^3}{3}=6cm^3$

$V_S=48-6=42\,cm^3$

Resposta: O volume do sólido é $42cm^3$.

Exemplo Abaixo da Média

a) O comprimento dos segmentos CK e DL são, respectivamente, 2 cm e 4 cm. A dedução do comprimento pode ser feita através do desenho formado, sabendo-se que o ponto O encontra-se no centro da face e o segmento CK abaixo do ponto e o segmento DL um pouco acima, deixada a mesma distância entre eles e o ponto O, conclui-se os comprimentos de 2cm e 4cm.

Comentários

Geometria espacial é um tópico considerado difícil pelos candidatos, mesmo quando os conceitos matemáticos envolvidos são simples, como no caso desta questão. Ainda assim, muitos candidatos chegaram corretamente às respostas pedidas, alguns deles utilizando caminhos que não aqueles mostrados acima. No exemplo abaixo da média, o candidato acerta os valores de CK e LD, mas sua resposta, apesar de conter um texto longo, não apresenta uma justificativa matemática plausível para os valores encontrados. Sendo assim, sua nota foi zero.