COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2009 vestibular nacional UNICAMP

2ª Fase

Matemática

MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO

A prova de matemática da segunda fase do vestibular da UNICAMP é elaborada de forma a identificar candidatos com boa capacidade de leitura de textos, tabelas e gráficos, bom raciocínio abstrato e domínio dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e no ensino médio. Não se deseja que o candidato decore centenas de fórmulas, mas que use seus conhecimentos e sua experiência para resolver questões que, frequentemente, abrangem mais de um tópico de matemática e fogem do padrão de exercícios apresentados nos cursinhos. Também se espera dos candidatos que resolvam questões relativas a assuntos de seu cotidiano, formulando modelos matemáticos que expressem corretamente os problemas apresentados.
Ao comentar a prova de matemática, tivemos a preocupação de apresentar estratégias alternativas de resolução das questões. Assim, sempre que um item vier acompanhado de um apóstrofo, como em **a’** ou **b’**, uma maneira diferente (e equivalente) de se obter a solução do problema é apresentada, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos leitores. Outras formas de resolver os problemas aparecem nos exemplos acima da média reproduzidos neste caderno. Já os exemplos abaixo média ilustram erros comuns cometidos pelos candidatos. Sugestões sobre o que não se deve fazer ao responder às questões da prova de matemática são dadas, algumas delas com base nos exemplos acima da média, para mostrar aos candidatos os deslizes que eles devem evitar ao responder às questões.

1. O transporte de carga ao porto de Santos é feito por meio de rodovias, ferrovias e dutovias. A tabela abaixo fornece alguns dados relativos ao transporte ao porto no primeiro semestre de 2007 e no primeiro semestre de 2008, indicando claramente o aumento da participação percentual do transporte ferroviário nesse período. Com base nos dados da tabela, responda às questões abaixo.

Meio de transporte	Participação no total transportado ao porto		Carga transportada (em milhões de toneladas)	
	2007	2008	2007	2008
Ferroviário	18 %	24 %	6,8	8,8
Rodoviário	77 %		29,1	
Dutoviário				

a) Determine a carga total (em milhões de toneladas) transportada ao porto no primeiro semestre de 2007. Calcule também quantas toneladas foram transportadas por dutos no primeiro semestre de 2007.

b) Sabendo que, no primeiro semestre de 2008, foram transportadas por rodovias 2,7 milhões de toneladas a menos do que o valor registrado pelo mesmo meio de transporte no primeiro semestre de 2007, calcule a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Se 6,8 milhões de toneladas correspondem a 18% do total transportado, então 100% correspondem a 6,8/0,18 ≈ 37,8 milhões de toneladas.
No primeiro semestre de 2007, foram transportadas por dutos 37,8 – 6,8 – 29,1 = 1,9 milhão de toneladas.

Resposta: No primeiro semestre de 2007, a carga transportada ao porto de Santos foi de aproximadamente 37,8 milhões de toneladas, das quais 1,9 milhão foram transportadas por dutos.

a’)
Se 29,1 milhões de toneladas correspondem a 77% do total transportado, então 100% correspondem a 29,1/0,77 ≈ 37,8 milhões de toneladas.
No primeiro semestre de 2007, o transporte dutoviário teve uma participação de 100 – 18 – 77 = 5% do total transportado ao porto. Assim, foram transportadas 37,8 x 0,05 ≈ 1,9 milhão de toneladas por dutos.

Resposta: No primeiro semestre de 2007, a carga transportada ao porto de Santos foi de aproximadamente 37,8 milhões de toneladas, das quais 1,9 milhão foram transportadas por dutos.

b) **(2 pontos)**
No primeiro semestre de 2008, foram transportadas 29,1 – 2,7 = 26,4 milhões de toneladas de carga. Se 8,8 milhões de toneladas correspondem a 24% do total transportado, então 26,4 milhões de toneladas correspondem a 26,4 x 24 / 8,8 = 3 x 24 = 72% da carga total.

Resposta: No primeiro semestre de 2008, o transporte de 72% da carga enviada ao porto de Santos foi feito por rodovias.

b')
No primeiro semestre de 2008, foram transportadas 29,1 – 2,7 = 26,4 milhões de toneladas de carga. Se 8,8 milhões de toneladas correspondem a 24% do total transportado, então a carga transportada nesse período é igual a 8,8/0,24 ≈ 36,7 milhões de toneladas. Assim, o percentual transportado por rodovias corresponde a 26,4 x 100 / 36,7 ≈ 72% do total.

Resposta: No primeiro semestre de 2008, o transporte de 72% da carga enviada ao porto de Santos foi feito por rodovias.

Exemplo Acima da Média

a) Por regra de três, temos o esquema:

I- 18% —— 6,8 (m. de t)
100% —— x

$x = \frac{100 \cdot 6,8}{18} = \frac{680}{18} = \frac{640}{9} = \boxed{37,7}$

II- 100% —— 37,8
5% —— y

$y \cong \frac{5 \cdot 37,8}{100} = \frac{189}{100} = \boxed{1,89}$ (m. de t)

Dutoviário (%) = 100 - (77+18) = 5%.

R → A carga total transportada no primeiro semestre de 2007, foi de aproximadamente 37,8 milhões de toneladas, sendo 1,89 milhões de toneladas transportado pelo Dutoviário

b) Para saber o valor total, temos:

100% —— z
24% —— 8,8

$z = \frac{880}{24} = \frac{110}{3} \cong 36,7$

Importação rodoviária em 2008 ⇒ (29,1 – 2,7) = 26,4

100% —— 36,7
R —— 26,4

$R = \frac{2640}{36,7} = 71,9$

$\boxed{R \cong 72\%}$

Exemplo Abaixo da Média

a) 29,1
\+ 6,8
35,9

R: Foram transportadas ao porto no primeiro semestre de 2007, 35,9 milhões de toneladas. E nenhuma tonelada foi transportada por dutos no primeiro semestre de 2007.

b) $29,1 — 0,77$ → $0,77 = 77\%$
$26,4 — x$ → ou seja $0,69 = 69\%$
$29,1x = 20,3$
$x = 0,69$

R: A participação porcentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008 é de aproximadamente 69%.

20,30 | 29,1
~~1746~~ 0,69
2840
2619
221

Comentários

Essa questão, a mais simples da prova, envolve a análise de uma tabela, o uso da regra de três, o cálculo de porcentagens e a manipulação de números decimais.
Na prova acima da média, o candidato forneceu as respostas certas, tendo usado mais casas decimais do que o necessário ao calcular a carga transportada por dutos (se a tabela contém dados com uma casa decimal, não há necessidade de usar mais casas na resposta).
No exemplo abaixo da média, o candidato disse não ter havido transporte dutoviário em 2007, apesar de a soma dos percentuais associados ao transporte rodoviário e ferroviário não ser igual a 100. Além disso, no item **b**, o candidato fez a regra de três mesclando dados de 2007 e de 2008, um erro muito comum nesta questão. Os erros em contas e a extração de dados errados da tabela foram as razões mais comuns para a perda de pontos entre os vestibulandos.
É bom lembrar, também, que questões como essa exigem que o candidato confira se os valores que obteve são compatíveis com os dados fornecidos. Assim, se a carga transportada por dutos for muito grande (envolvendo centenas de milhões de toneladas) ou muito pequena (equivalendo a alguns poucos quilogramas), é provável que algum erro tenha ocorrido na leitura do problema ou na execução de alguma conta. Neste caso, conferir as respostas é uma boa estratégia para evitar dissabores.

2. Uma lâmpada incandescente de 100 W custa R$ 2,00. Já uma lâmpada fluorescente de 24 W, que é capaz de iluminar tão bem quanto a lâmpada incandescente de 100 W, custa R$ 13,40. Responda às questões abaixo, lembrando que, em uma hora, uma lâmpada de 100 W consome uma quantidade de energia equivalente a 100 Wh, ou 0,1 kWh. Em seus cálculos, considere que 1 kWh de energia custa R$ 0,50.

a) Levando em conta apenas o consumo de energia, ou seja, desprezando o custo de aquisição da lâmpada, determine quanto custa manter uma lâmpada incandescente de 100 W acesa por 750 horas. Faça o mesmo cálculo para uma lâmpada fluorescente de 24 W.

b) Para iluminar toda a sua casa, João comprou e instalou apenas lâmpadas fluorescentes de 24 W. Fernando, por sua vez, comprou e instalou somente lâmpadas incandescentes de 100 W para iluminar sua casa. Considerando o custo de compra de cada lâmpada e seu consumo de energia, determine em quantos dias Fernando terá gasto mais com iluminação que João. Suponha que cada lâmpada fica acesa 3 horas por dia. Suponha, também, que as casas possuem o mesmo número de lâmpadas.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Para manter a lâmpada incandescente acesa por 750 horas, gasta-se 750 x 0,1 x 0,5 = R$ 37,50 com o consumo de energia.
Já para manter a lâmpada fluorescente acesa pelo mesmo período, gasta-se 750 x 0,024 x 0,5 = R$ 9,00.

Resposta: O gasto com a lâmpada incandescente atinge R$ 37,50, enquanto o gasto com a lâmpada fluorescente é igual a R$ 9,00.

b) **(2 pontos)**
Se d é o número de dias transcorridos desde a compra das lâmpadas, podemos dizer que o gasto de João com cada ponto de luz da casa é dado por J(d) = 13,4 + 0,5 x 0,024 x 3d = 13,4 + 0,036d. Já o gasto de Fernando com cada ponto de luz é dado por F(d) = 2 + 0,5 x 0,1 x 3d = 2 + 0,15d.
Considerando J(d) < F(d), obtemos 13,4 + 0,036d < 2 + 0,15d, ou (0,15 − 0,036)d > (13,4 − 2), ou ainda 0,114d > 11,4. Logo, d > 11,4/0,114 = 100.

Resposta: Depois de 100 dias, Fernando terá gasto mais com iluminação do que João.

Exemplo Acima da Média

a) 100W ⇒ consome 100 Wh = 0,1 KWh de energia
para ficar acesa por 750 horas precisa de uma energia
igual a = 0,1 . 750 = 75 KWh ⇒ se 1 KWh custa R$ 0,50
então 75 KWh = 75 . 0,5 = $\boxed{\text{R\$ 37,50}}$
24W ⇒ consome 24 Wh = 0,024 KWh de energia
para ficar acesa por 750 horas precisa de uma energia
de = 0,024 . 750 = 18 KWh ⇒ se 1 KWh custa R$ 0,50
então 18 KWh = 18 . 0,5 = $\boxed{\text{R\$ 9,00}}$

b) João ⇒ lâmpadas fluorescentes 24W (x lâmpadas
Fernando ⇒ lâmpadas incadescentes 100W
João por dia gasta ⇒ x . 0,024 . 3 . 0,5 ⇒ x . 0,036 + x . 13,4
Fernando por dia gasta ⇒ x . 0,1 . 3 . 0,5 ⇒ x . 0,15 + x . 2
($\cancel{x}$. 0,036 . y ⇒dias + $\cancel{x}$. 13,4 = ($\cancel{x}$. 0,15) y + $\cancel{x}$. 2
0,036 y + 13,4 = 0,15 y + 2
0,114 y = 11,4 ⇒ y = 100 dias
Em 101 dias Fernando terá gasto mais que João.

Exemplo Abaixo da Média

a) 100Wh — 0,50 reais

100W·750h — 0,50·750 = 375 reais

Teremos também:

$100Wh — 0{,}5 \quad \therefore y = \frac{12}{100} = 0{,}12$ reais

$24Wh — y$ (reais)

Se em uma hora a lâmpada gasta R$0,12 em 750 gastará:

750·0,12 = 90 reais

Para um tempo de 750 horas, ~~a lâmpada de 100W~~ para manter a lâmpada de 100W haverá custo de R$ 375,00 e para a de 24W haverá custo de R$ 90,00.

b) Supondo que as casas têm o mesmo nº de lâmpadas x. Teremos:

João: $13{,}40 \cdot x + \underbrace{3}_{\text{horas}} \cdot \underbrace{0{,}12}_{\text{gasto}} \cdot \underbrace{y}_{\text{dias}}$ Fernando: $2{,}00 \cdot x + 3 \cdot 0{,}5 \cdot y$

Supondo ~~ø~~ uma lâmpada eles terão o mesmo gasto em:

$0{,}36y + 13{,}4 = 1{,}5y + 2 \quad \therefore y = 10$ dias

$1{,}14y = 11{,}4$

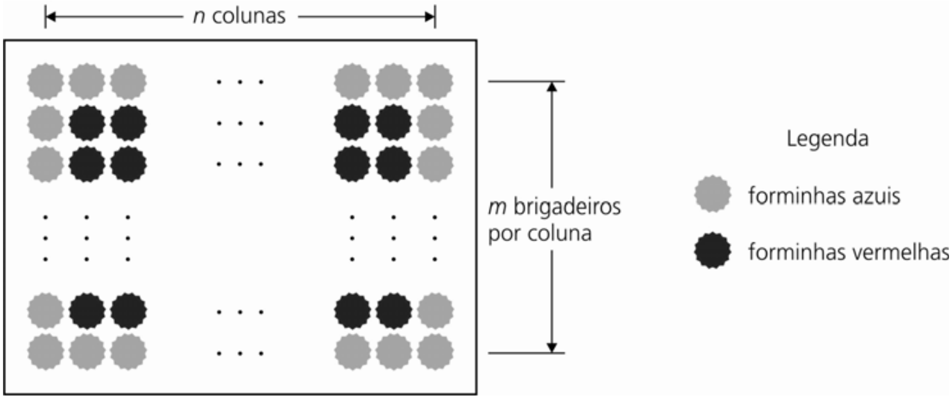
Sendo assim Fernando terá gasto mais com iluminação que João ~~a partir do 11º dia~~ em 11 dias.

Comentários

Esta questão envolve a formulação de duas funções lineares afins, bem como a manipulação de uma desigualdade envolvendo essas funções. No exemplo acima da média, o candidato acerta as respostas, apesar de não trabalhar explicitamente com a desigualdade no item **b**. Além disso, sua resposta seria mais precisa se dissesse que Fernando teria gasto mais que João depois de transcorridos mais de 100 dias, em lugar de 101 dias.

No exemplo abaixo da média, o vestibulando erra o item **a** por considerar que 1kWh equivale a 100Wh. Já no item **b**, o erro cometido é ainda maior, uma vez o número de lâmpadas é usado apenas no cálculo do custo de aquisição das mesmas, mas não no consumo de energia das casas (observe que o termo x aparece multiplicado apenas pelos preços das lâmpadas na equação 13,4.x + 3.0,12.y = 2.x + 3.0,5.y). Em seguida, para conseguir resolver o problema, o candidato faz a variável x desaparecer, obtendo a equação 13,4+0,36y = 2+1,5y. Essa sucessão de erros, aliás, muito frequentes, fez com que seu desempenho na questão não fosse bom.

3. Em uma bandeja retangular, uma pessoa dispôs brigadeiros formando n colunas, cada qual com m brigadeiros, como mostra a figura abaixo. Os brigadeiros foram divididos em dois grupos. Os que estavam mais próximos das bordas da bandeja foram postos em forminhas azuis, enquanto os brigadeiros do interior da bandeja foram postos em forminhas vermelhas.



a) Sabendo que $m = 3n/4$ e que a pessoa gastou o mesmo número de forminhas vermelhas e azuis, determine o número de brigadeiros da bandeja.

b) Se a pessoa compra a massa do brigadeiro já pronta, em latas de 1 litro, e se cada brigadeiro, antes de receber o chocolate granulado que o cobre, tem o formato de uma esfera de 2 cm de diâmetro, quantas latas ela tem que comprar para produzir 400 brigadeiros? (Dica: lembre-se de que 1 litro corresponde a 1000 cm^3.)

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O número de forminhas azuis é igual a $F_A = 2n + 2(m - 2) = 2n + 2m - 4$. Já o número de forminhas vermelhas é igual a $F_V = (n - 2)(m - 2) = nm - 2m - 2n + 4$.

Igualando as duas expressões, obtemos $4n + 4m - mn - 8 = 0$. Como $m = 3n/4$, temos $7n - 3n^2/4 - 8 = 0$, ou $3n^2 - 28n + 32 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$n = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4.3.32}}{2.3} = \frac{28 \pm 20}{6}$$

Assim, $n = 8$ ou $n = 4/3$. Como n deve ser um número inteiro, concluímos que $n = 8$ e $m = 3x8/4 = 6$, de modo que a bandeja tem 6x8 = 48 brigadeiros.

Resposta: A bandeja tem 48 brigadeiros.

a')

O número de forminhas vermelhas é igual a $F_V = (n - 2)(m - 2) = nm - 2m - 2n + 4$. Já o número de forminhas azuis é a metade do número total de forminhas, ou seja, $F_A = nm/2$.

Igualando as duas expressões, obtemos $nm/2 - 2m - 2n + 4 = 0$. Como $n = 4m/3$, temos $2m^2/3 - 14m/3 - 4 = 0$, ou $m^2 - 7m + 6 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$m = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

Assim, $m = 6$ ou $m = 1$. No primeiro caso, $n = 4.6/3 = 8$. No segundo caso, $n = 4.1/3 = 4/3$. Como n deve ser um número inteiro, concluímos que $n = 8$ e $m = 6$, de modo que a bandeja tem 6x8 = 48 brigadeiros

Resposta: A bandeja tem 48 brigadeiros.

b) **(2 pontos)**
Cada brigadeiro tem 1 cm de raio. Assim, sem contar o chocolate granulado, o volume de um brigadeiro é igual a $4\pi r^3/3 = 4\pi/3 \approx 4x3{,}14/3 \approx 4{,}19\ cm^3$.
Logo, somando os 400 brigadeiros, obtemos um volume total aproximado de $400x4{,}19 = 1676\ cm^3$. Como 1 litro corresponde a $1000\ cm^3$, 400 brigadeiros correspondem a cerca de $1676/1000 = 1{,}676$ litros. Portanto, é necessário comprar 2 latas da massa pronta.

Resposta: A pessoa tem que comprar 2 latas da massa de brigadeiro.

Exemplo Acima da Média

a) forminhas azuis = $2n+2(m-2)$
forminhas vermelhas = $(n-2)(m-2)$

$2n+2(m-2)=(n-2)(m-2)$

$2n+2m-4 = n.m-2n-2m+4$

$4n+4m-8-n.m=0$ $\quad m=3n/4$

$4n+4\left(\frac{3n}{4}\right)-8-n.\frac{3n}{4}=0$

$3n^2-28n+32=0$

$\Delta = 784-4(3)(32)=400$

$n' = \frac{28+20}{6} = 8$

$n'' = \frac{28-20}{6} = \frac{4}{3}$ (Ñ/C)

$\boxed{n=8} \Rightarrow \boxed{m=6}$

número de brigadeiros $= n.m = 8.6 = \boxed{48}$

b) V brigadeiro $= \frac{4}{3}\pi r^3 =$

$= \frac{4}{3}.\pi.1^3 \cong 4\ cm^3$

1 brigadeiro — $4\ cm^3$
400 — V

$V = 1600\ cm^3$

1 lata — $1000\ cm^3$
y — $1600\ cm^3$

$y = 1{,}6$ latas

Resposta: Ela tem que comprar $\boxed{2 \text{ latas}}$.

Exemplo Abaixo da Média

a) $n+1 = \frac{3n}{4}$ $\quad$ assim: $n.m =$

$4n+4=3n$ $\quad 4.\frac{3.4}{4} =$

$n=4$ $\quad$ 12 brigadeiros

b) $V = a_b.h$

$V = 2\pi r^2.2$

para $\pi = 3$

$V = 2.3.1^2.2$

$V = 12\ cm^3$

1 brigadeiro = $12\ cm^3$
400 → $4.800\ cm^3$

1 l — $1000\ cm^3$
x — $4800\ cm^3$

$10x = 48$

$x = 4{,}8$ litros

R: Ela terá que comprar 5 latas de 1 l de massa de brigadeiro

Comentários

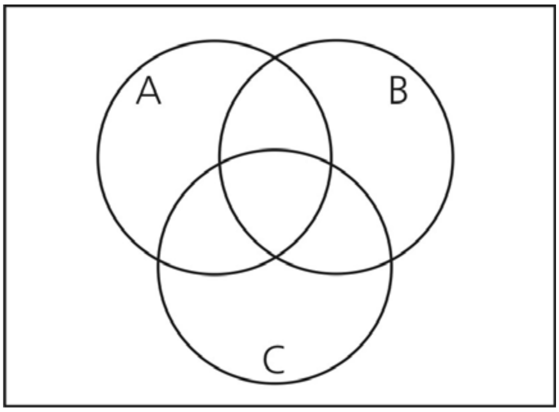
O item **a** dessa questão envolve a representação do número de forminhas azuis em vermelhas da bandeja como função das incógnitas m e n, bem como a resolução de uma equação do segundo grau para determinar o número total de forminhas. O item **b** envolve o cálculo do volume de uma esfera de diâmetro conhecido e a conversão de cm^3 para litros, para a determinação do número necessário de latas de massa de brigadeiro.
Apesar do conteúdo simples, mais de 40% dos candidatos tiraram nota zero na questão, a maioria por deixá-la em branco. Dentre os erros mais comuns, destacam-se a contagem errada do número de brigadeiros, o desconhecimento da fórmula de Báskara e o cálculo incorreto do volume do brigadeiro. Muitos candidatos também perderam os pontos do item **a** por fornecerem diretamente os valores m = 6 e n = 8, sem descrever como eles foram obtidos.
O único senão do exemplo acima da média é o uso da aproximação $\pi \approx 3$, já que seria preferível utilizar uma aproximação com mais casas decimais, como 3,14. Já no exemplo abaixo da média, o candidato considera erroneamente que m = n – 1, obtendo n = 4 e m = 3 no item **a**. No item **b**, a fórmula usada para calcular o volume da esfera é $V = A_b.h = 2\pi r^2.2$, expressão que nem sequer é quando os brigadeiros são cilíndricos.

4. Três candidatos A, B e C concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato A, 70 votariam apenas em B, e 100 votariam apenas no candidato C. Além disso, 190 disseram que não votariam em A, 110 disseram que não votariam em C, e 10 sócios estão na dúvida e podem votar tanto em A como em C, mas não em B. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato. Com base nesses dados, pergunta-se:

a) Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não votariam em A? Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em B?

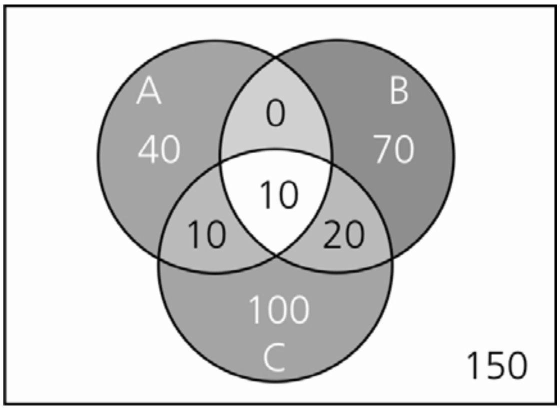
b) Quantos sócios participaram da pesquisa? Suponha que a pesquisa represente fielmente as intenções de voto de todos os sócios do clube. Escolhendo um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele vá participar da eleição mas ainda não tenha se decidido por um único candidato?

(Sugestão: utilize o diagrama de Venn fornecido abaixo)



Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**



O diagrama ao lado fornece as informações que podem ser extraídas do enunciado. Como se vê, o número de sócios que poderiam votar em B ou em C, mas não em A, é dado por $|B \cap C \cap (\neg A)| = 190 - 70 - 100 = 20$.
Por outro lado, o número de sócios que pretendem participar da eleição mas não votariam em B é dado por $|A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C \cap (\neg A)| = 40 + 10 + 100 = 150$.

Resposta: 20 sócios estão em dúvida entre os candidatos B e C, mas não votariam em A. Dentre os sócios que pretendem participar da eleição, 150 não votariam no candidato B.

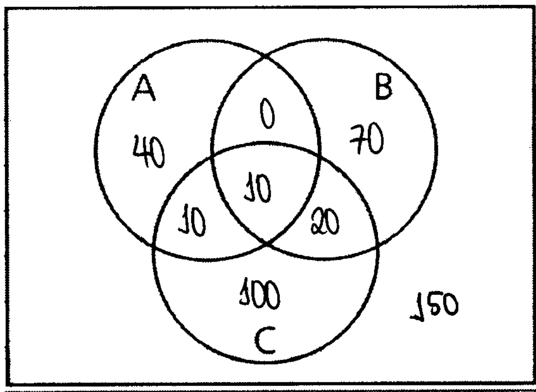
b) **(2 pontos)**
O número de entrevistados é igual a 150 + 40 + 70 + 100 + 0 + 10 + 20 +10 = 400. O número de entrevistados em dúvida é igual a $|A \cap C \cap (\neg B)| + |A \cap B \cap (\neg C)| + |B \cap C \cap (\neg A)| + |A \cap B \cap C| = 10 + 0 + 20 + 10 = 40$.
Assim, se escolhermos um dos 400 entrevistados ao acaso, a probabilidade de ele ainda não ter decidido em qual candidato irá votar é igual a 40/400 = 0,1. Como a pesquisa reflete fielmente a realidade, a probabilidade de um sócio ainda não ter decidido em quem votar é igual a 0,1, ou 10%.

Resposta: A probabilidade de um sócio não ter escolhido ainda o seu candidato é igual a 0,1, ou 10%.

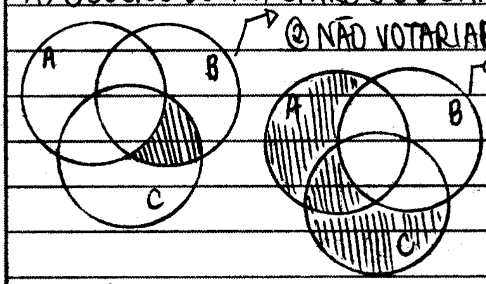
b')
O número de entrevistados é igual a 150 + 40 + 70 + 100 + 0 + 10 + 20 +10 = 400. O número de entrevistados em dúvida é igual a $|A \cap C \cap (\neg B)| + |A \cap B \cap (\neg C)| + |B \cap C \cap (\neg A)| + |A \cap B \cap C| = 10 + 0 + 20 + 10 = 40$.
Escolhendo-se um dos entrevistados ao acaso, a probabilidade de que ele participe da eleição é igual a 250/400. Considerando, agora, apenas os entrevistados que participarão da eleição, a probabilidade de que um deles, escolhido ao acaso, esteja em dúvida é igual a 40/250. Assim, se escolhermos um dos sócios ao acaso, a probabilidade de ele ainda não ter decidido em qual candidato irá votar é igual a (250/400).(40/250) = 0,1. Como a pesquisa reflete fielmente a realidade, a probabilidade de um sócio ainda não ter decidido em quem votar é igual a 0,1, ou 10%.

Resposta: A probabilidade de um sócio não ter escolhido ainda o seu candidato é igual a 0,1, ou 10%.

Exemplo Acima da Média



A) ① SÓCIOS DÚVIDA ENTRE B E C E NÃO EM A: $\boxed{20}$



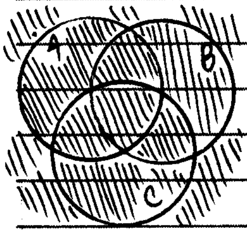
② NÃO VOTARIAM EM B:

$= 40 + 10 + 100$

$= \boxed{150}$

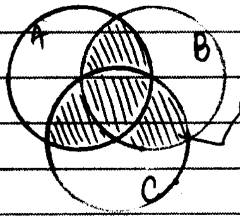
R: 20 sócios estão entre B e C mas não em A e 150 não votariam em B.

B) ① TOTAL DE SÓCIOS NA PESQUISA:



$= 40+10+10+20$
$+100+70+150$
$= \boxed{400}$

② PROBABILIDADE:

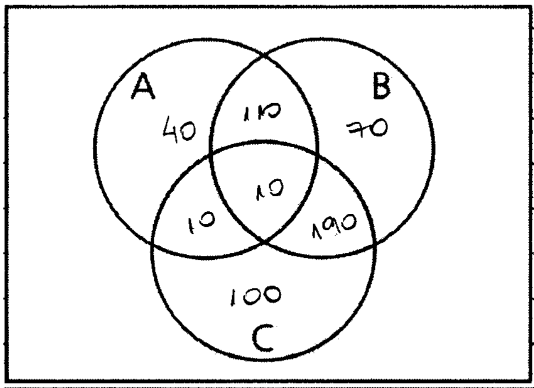


probabilidade deste ocorrer: $\frac{(10+10+20+0)}{400}$

$= \frac{40}{400} = \boxed{\frac{1}{10} \text{ ou } 10\%}$

R: O total de sócios na pesquisa é 400 e a probabilidade é $\frac{1}{10}$.

Exemplo Abaixo da Média



4)a) Os que estão em dúvida em votar em B ou C mas não em A são: $70 + 190 + 100 = 360$ pessoas.

Os candidatos que não votariam em B seriam: $40+10+100 = 150$ pessoas.

b) Participaram dessa pesquisa: $40+10+100+190+70+110+10 = 530$ sócios

- O clube possui: $530+150 = 680$ sócios (530 querem votar)
- 10 sócios estão em dúvida em quem votar (dentre os 530 sócios)

$P = \frac{53\cancel{0}}{68\cancel{0}} \cdot \frac{1\cancel{0}}{53\cancel{0}} = \frac{1}{68}$

R: A probabilidade de que o sócio vá participar da eleição mas ainda está em dúvida é de $\frac{1}{68}$.

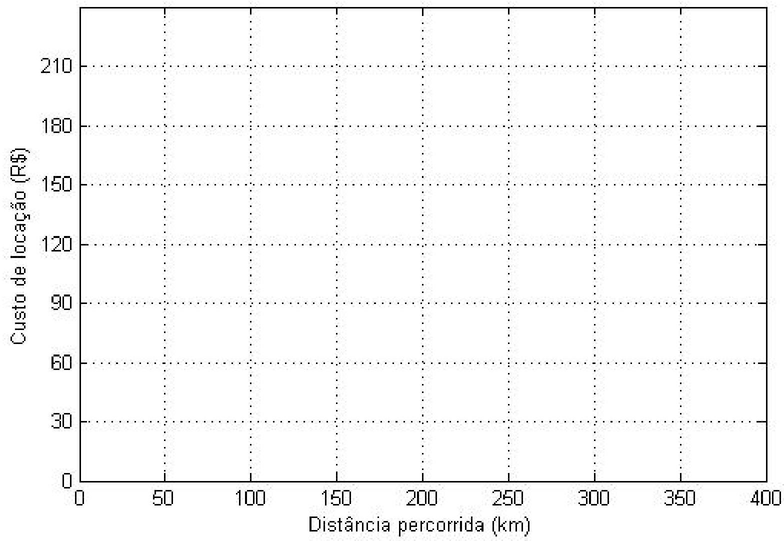
Comentários

Questão clássica sobre união e interseção de conjuntos e sobre probabilidade, que também exigiu dos candidatos uma boa capacidade de articular idéias com base nas informações descritas no enunciado. Na prova abaixo da média, o vestibulando anotou o valor 190 na região do diagrama associada à interseção dos conjuntos B e C, e 110 na interseção dos conjuntos A e B, obtendo respostas erradas nos dois itens da questão. O exemplo acima da média mostra uma resposta muito bem apresentada, com diagramas que abrangem todas as situações previstas na questão.

5. Duas locadoras de automóveis oferecem planos diferentes para a diária de um veículo econômico. A locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R$ 30,00, além de R$ 0,40 por quilômetro rodado. Já a locadora Mercúrio tem um plano mais elaborado: ela cobra uma taxa fixa de R$ 90,00 com uma franquia de 200 km, ou seja, o cliente pode percorrer 200 km sem custos adicionais. Entretanto, para cada km rodado além dos 200 km incluídos na franquia, o cliente deve pagar R$ 0,60.

a) Para cada locadora, represente no gráfico abaixo a função que descreve o custo diário de locação em termos da distância percorrida no dia.

b) Determine para quais intervalos cada locadora tem o plano mais barato. Supondo que a locadora Saturno vá manter inalterada a sua taxa fixa, indique qual deve ser seu novo custo por km rodado para que ela, lucrando o máximo possível, tenha o plano mais vantajoso para clientes que rodam quaisquer distâncias.



Resposta Esperada

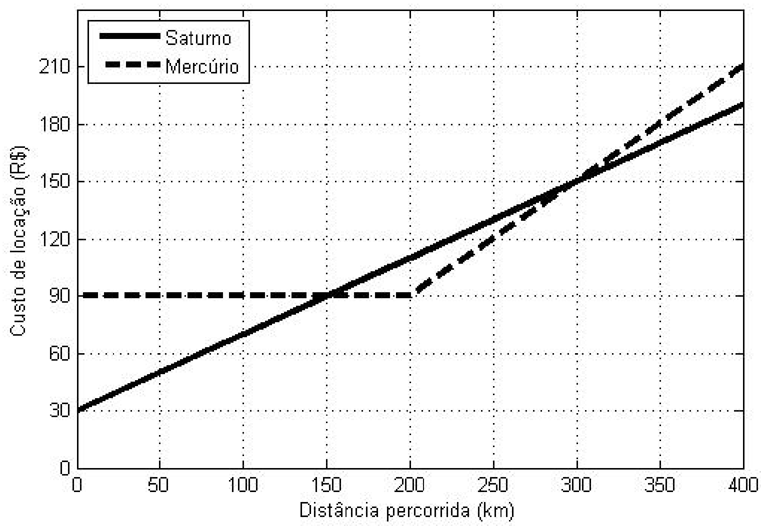
a) **(2 pontos)**

As funções que descrevem o custo diário de locação em função de d, a distância percorrida por dia, são:

$$c_S(d) = 30 + 0{,}4d.$$

$$c_M(d) = \begin{cases} 90, & \text{se } \ d \le 200; \\ 90 + 0{,}6(d - 200), & \text{se } \ d > 200. \end{cases}$$

Essas funções estão representadas no gráfico ao lado.

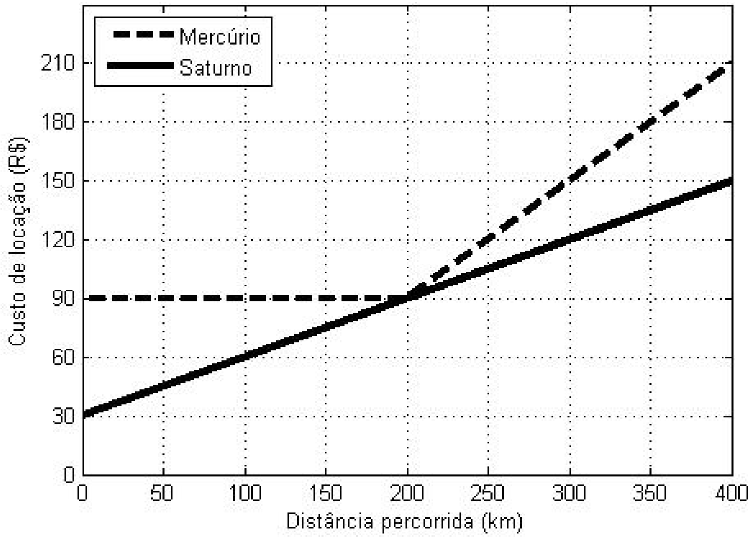


b) **(2 pontos)**

Para encontrar o primeiro ponto de interseção das curvas, resolvemos a equação $30 + 0{,}4d = 90$. Neste caso, $d = 60/0{,}4 = 150$ km.

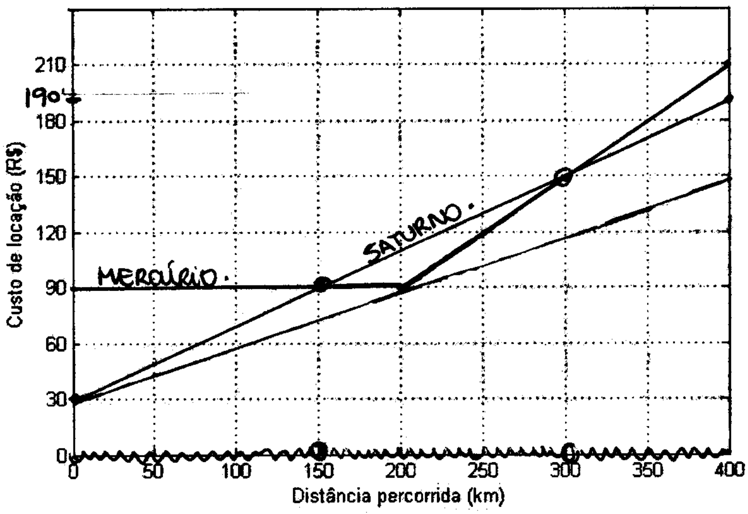
O segundo ponto de interseção é dado pela solução de $30 + 0{,}4d = 90 + 0{,}6(d - 200)$. Simplificando esta equação, obtemos $0{,}2d = 60$, de modo que $d = 300$. Como se observa, para $150 \le d \le 300$, a locadora Mercúrio é a mais barata. Nos outros intervalos a Saturno tem o plano mais barato.

Para que a locadora Saturno obtenha o maior lucro possível e seja sempre a mais vantajosa, é necessário que a curva que descreve seu custo passe pelo ponto (200, 90), como mostra o gráfico ao lado. Suponha, então, que c seja seu novo custo por quilômetro. Neste caso, devemos ter $30 + 200c = 90$, ou $c = 60/200 =$ R\$ 0,30.



Resposta: A locadora Mercúrio é a mais barata para distâncias maiores que 150 km e menores que 300 km. Para distâncias menores que 150 km ou maiores que 300km, a Saturno é a mais barata. Para que seja sempre a mais vantajosa, a locadora Saturno deve cobrar R$ 0,30 por quilômetro rodado.

Exemplo Acima da Média



a) LOCADORA SATURNO:

$f(x) = 30 + 0{,}4x$.

LOCADORA MERCÚRIO

$f(x) = 90$ (até 200km)

$f(x) = 90 + 0{,}6x$ (a partir de 200km).

b) De acordo com o gráfico:

mercúrio terá plano mais barato nos intervalos:

$150 < x < 300$

saturno terá plano mais barato nos intervalos:

$0 < x < 150$ e $x > 300$.

Para que seja o mais vantajoso possível a função deve descrever a seguinte situação:

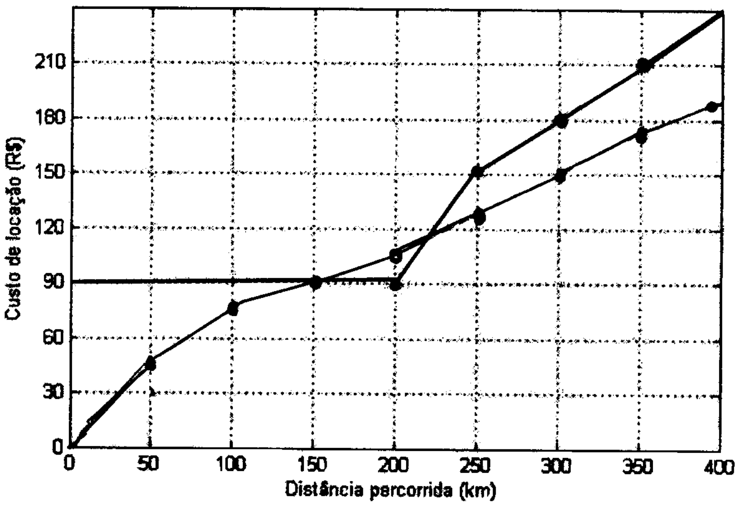
$f(x) = 30 + kx$ $\qquad x = 0{,}3$.

$90 = 30 + 200x$

$\frac{60}{200} = x$

Resposta: O custo novo deverá ser: R\$ 0,30.

Exemplo Abaixo da Média



Legenda:
[—] - mercúrio
[—] - Saturno

a): no gráfico

b): Saturno tem o plano mais barato, exceto no intervalo de 150 a 200 km aonde Mercúrio fica mais barato.

Comentários

O primeiro item desta questão envolvia o traçado do gráfico de duas funções simples, uma das quais definida por partes. Já o item **b** exigia do candidato a capacidade de determinar o coeficiente angular de uma reta para que esta interceptasse outra curva em apenas um ponto.
O traçado cuidadoso das funções era um requisito para que o candidato obtivesse os pontos desejados na questão, pois um erro, ainda que modesto, na inclinação de uma das retas, além de comprometer a resposta do item **a**, era suficiente para que os intervalos pedidos no item **b** ficassem incorretos.
No exemplo acima da média, ao responder ao item **b**, aparentemente o candidato cometeu um pequeno engano ao escrever $f(x) = 30 + kx$ e tomar $k = 200$ para obter $x = 0{,}3$. Neste caso, o natural seria tomar $x = 200$ para determinar $k = 0{,}3$, já que $f(x)$ define o custo de locação em função da distância total percorrida. Por outro lado, o candidato apresenta corretamente no gráfico a reta usada na obtenção do coeficiente angular, justificando a resposta encontrada.
No exemplo abaixo da média, a curva da locadora Mercúrio tem dois segmentos de reta com inclinações diferentes a partir dos 200 km. Além disso, a curva da Locadora saturno começa na origem e não é uma reta.

6. m casal convidou seis amigos para assistirem a uma peça teatral. Chegando ao teatro, descobriram que, em cada fila da sala, as poltronas eram numeradas em ordem crescente. Assim, por exemplo, a poltrona 1 de uma fila era sucedida pela poltrona 2 da mesma fila, que, por sua vez, era sucedida pela poltrona 3, e assim por diante.

a) Suponha que as oito pessoas receberam ingressos com numeração consecutiva de uma mesma fila e que os ingressos foram distribuídos entre elas de forma aleatória. Qual a probabilidade de o casal ter recebido ingressos de poltronas vizinhas?

b) Suponha que a primeira fila do teatro tenha 8 cadeiras, a segunda fila tenha 2 cadeiras a mais que a primeira, a terceira fila tenha 2 cadeiras a mais que a segunda e assim sucessivamente até a última fila. Determine o número de cadeiras da sala em função de n, o número de filas que a sala contém. Em seguida, considerando que a sala tem 144 cadeiras, calcule o valor de n.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Existem $C_{8,2}$ = 8x7/2 = 28 pares diferentes de ingressos que podem ser dados para o casal. Dentre esses pares de ingressos, existem exatamente 7 que correspondem a cadeiras vizinhas. Assim, a probabilidade de o casal ter recebido um par de ingressos de cadeiras vizinhas é igual a 7/28 = 1/4, ou 25%.

Resposta: A probabilidade de o casal ter recebido ingressos consecutivos é de 1/4, ou 25%.

a')

Existem P_8 = 8! maneiras diferentes de distribuir 8 ingressos entre 8 pessoas. Dessas formas de distribuir os ingressos, o casal recebe bilhetes consecutivos em $P_2.P_7$ = 2!.7! dos casos. Assim, a probabilidade de o casal ter recebido um par de ingressos de cadeiras vizinhas é igual a 2!.7!/8! = 1/4, ou 25%.

Resposta: A probabilidade de o casal ter recebido ingressos consecutivos é de 1/4, ou 25%.

b) **(2 pontos)**

O número de cadeiras na fila k é igual a c_k = 6 + 2k. Somando o número de cadeiras das n filas, obtemos $\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}(6+2k) = \frac{n(8+6+2n)}{2} = 7n + n^2$. Se o teatro tem 144 cadeiras, então $7n + n^2 = 144$, ou $n^2 + 7n - 144 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 4.1.144}}{2.1} = \frac{-7 \pm 25}{2}.$$

Assim, n = –16 ou n = 9. Como n > 0, o teatro tem 9 filas.

Resposta: O teatro tem n^2 + 7n cadeiras. Se há 144 cadeiras, estas estão dispostas em 9 filas.

Exemplo Acima da Média

a) A ordem entre o casal ñ importa

X _ _ _ _ _ _ _ ⇒ 7 lugares, 1 ao lado

_ X _ _ _ _ _ _ ⇒ 6 lugares, 1 ao lado

_ _ X _ _ _ _ _ ⇒ 5 lugares, 1 ao lado

etc...

$P = \frac{7(\cdot 1)}{7+6+5+4+3+2+1} = \frac{7}{28} \Rightarrow \boxed{P = 25\%}$

b) $S = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$, sendo $a_1 = 8$

e a_n = última fila $= a_1 + 2(n-1)$

$S = \frac{(8 + 8 + 2(n-1))\cdot n}{2}$

$S = \frac{(16 + 2n - 2)\cdot n}{2} \Rightarrow \boxed{S = n(n+7)} \Rightarrow 144 = n^2 + 7n$

$n^2 + 7n - 144 = 0$

$n_1 = -16$ (ñ convém)

$\boxed{n_2 = +9}$

Exemplo Abaixo da Média

a) A probabilidade de o casal ter recebido ingressos de poltronas vizinhas, considerando uma fila com oito poltronas, temos:

$P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$

b) Sn: total de cadeiras
n: fileiras
Considerando que o número de cadeiras de uma fila para outra forme uma PA de razão 2 cujo primeiro termo (a1) é igual a 8, temos:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(8 + 8(n-1).2)n}{2} = \frac{(8+16n-16)n}{2}$

$\boxed{S_n = \frac{(16n-8)n}{2}}$ $\boxed{n = 5}$

Se $S_n = 144$: $144 . 2 = (16n - 8) . n$

$16n^2 - 8n^2 - 288 = 0$

Comentários

Essa questão mescla combinatória, probabilidade e progressão aritmética, conteúdos tradicionais do ensino médio, em um problema do cotidiano. A interpretação correta dos dados fornecidos e dos resultados obtidos talvez seja o ponto mais difícil da questão.

O exemplo acima da média mostra uma alternativa engenhosa para se obter a resposta do item **a**, apresentada, infelizmente, sem muita explicação. Para descrever corretamente essa resposta, consideremos que um dos membros do casal decida sentar-se na primeira das 8 poltronas disponíveis, ou seja, na poltrona correspondente ao ingresso de número mais baixo. Neste caso, sobram sete lugares para o segundo membro do casal, sendo apenas um deles vizinho ao assento do primeiro membro. Suponhamos, agora, que o primeiro membro do casal escolha a segunda das 8 poltronas. Neste caso, sobram apenas seis lugares para o segundo membro, pois o sétimo lugar já foi considerado na análise anterior. Mais uma vez, desses lugares, apenas um é vizinho à poltrona do primeiro membro do casal. Podemos prosseguir com essa análise até considerar a situação na qual o primeiro membro do casal senta-se na sétima cadeira disponível. Assim, concluímos que há 7+6+5+4+3+2+1 = 28 poltronas para acomodar o segundo membro, das quais 7 são vizinhas ao seu parceiro, de modo que a probabilidade pedida é igual a 7/28, ou 25%.

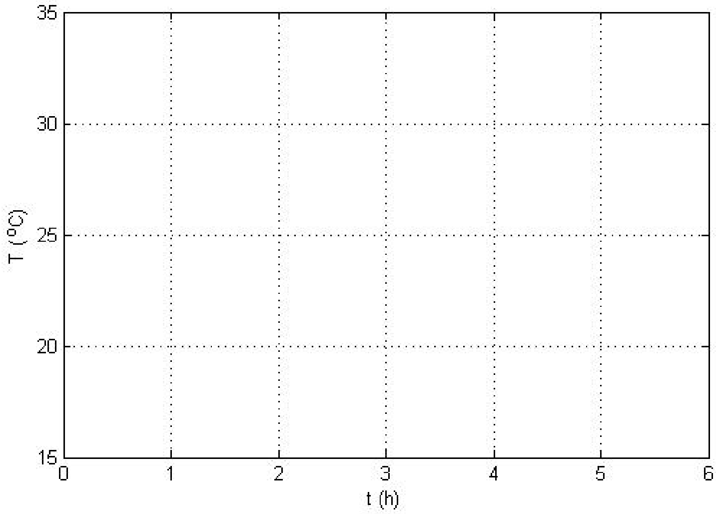
Dentre os erros mais comuns no item **a**, destacamos aquele apresentado no exemplo abaixo da média, em que o candidato considera que há 8 poltronas para atribuir a 2 pessoas, de modo que a probabilidade é igual a 2/8 = 0,25. Este é um caso típico de resposta que, apesar de coincidir com o valor correto, não é aceita. Outros valores incorretos fornecidos pelos vestibulandos foram 7!/8!, 28% (já que $C_{8,2} = 28$) e 56% (uma vez que $A_{8,2} = 56$).

No item **b**, o erro mais frequente foi a adoção de expressões incorretas para o termo geral ou para a soma dos termos da progressão aritmética.

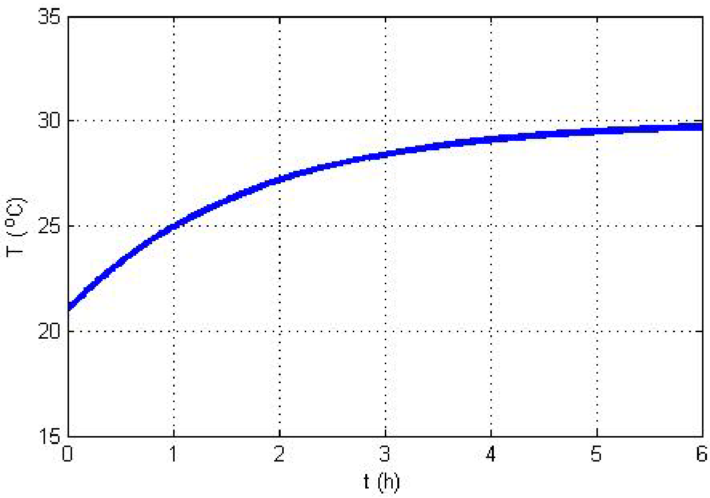
7. O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t, o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é $T(t) = (T_0 - T_{ext}).10^{-t/4} + T_{ext}$, onde T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que T_0 = 21ºC e T_{ext} = 30ºC, responda às questões abaixo.

a) Calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado. Em seguida, esboce abaixo o gráfico de T(t).

b) Calcule o tempo gasto, a partir do momento da quebra do ar condicionado, para que a temperatura subisse 4ºC. Se necessário, use $\log_{10} 2 \approx 0{,}30$, $\log_{10} 3 \approx 0{,}48$ e $\log_{10} 5 \approx 0{,}70$.



Resposta Esperada



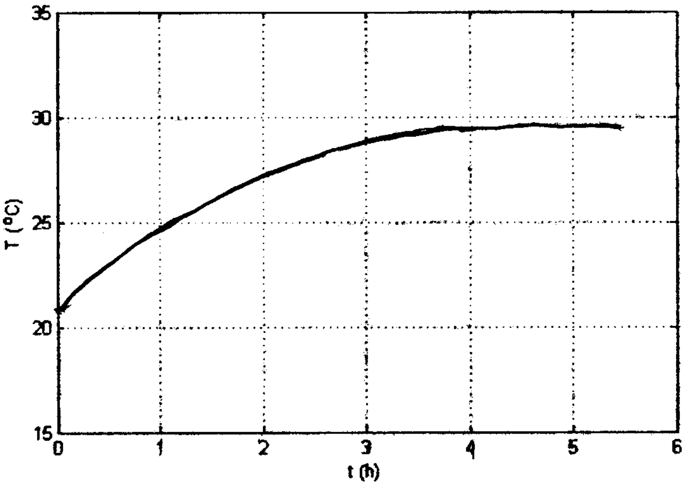
a) **(2 pontos)**
Passadas 4 horas da quebra do aparelho de ar condicionado, a temperatura dentro do ônibus era igual a $T(4) = 30 - 9\text{x}10^{-1} =$ 29,1ºC.
O gráfico da função T(t) é apresentado ao lado. Como se observa, a função vale 21 quando t = 0 e se aproxima de 30 à medida que t cresce.

Resposta. Quando t = 4 h, a temperatura atingiu 29,1ºC. O gráfico de T(t) é dado ao lado.

b) **(2 pontos)**
O instante desejado é aquele no qual T(t) = 21 + 4 = 25ºC, ou seja, precisamos determinar t, tal que $30 - 9\text{x}10^{-t/4} = 25$. Assim, temos $10^{-t/4} = 5/9$.
Aplicando o logaritmo (na base 10) nos dois lados da equação, obtemos $-t/4 = \log(5) - \log(3^2)$, ou seja, $t = 4(2\log(3) - \log(5)) \approx 4(2\text{x}0{,}48 - 0{,}70) = 1{,}04$ hora. Logo, t = 1h2m24s.

Resposta: A temperatura subiu 4ºC depois de transcorrida 1,04 hora, ou 1h2m24s.

Exemplo Acima da Média



A) Quando $t = 4$:

$T(4) = (21 - 30).\, 10^{-\frac{4}{4}} + 30$

$T(4) = -9 .\, 10^{-1} + 30$

$T(4) = 29,1$

Após 4 horas a temperatura seria de 28,1°C.

B) Quando $T(t) = 25$°C

$25 = (21-30).\, 10^{-t/4} + 30$

$9 .\, 10^{-t/4} = 5$

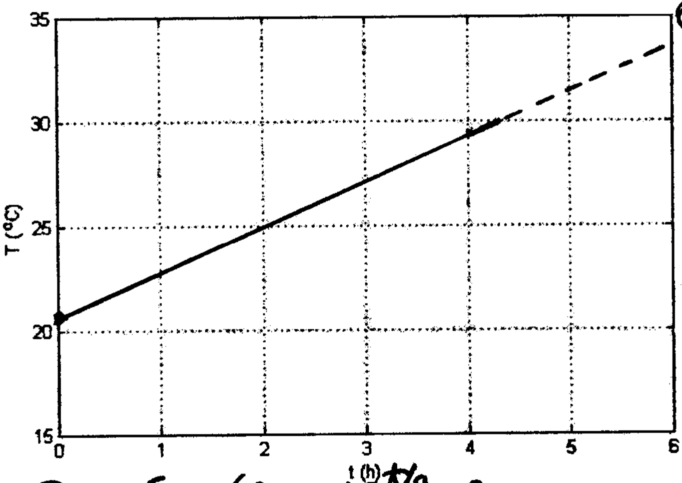
$10^{-t/4} = 5/9$

$\log \frac{5}{9} = \frac{-t}{4}$, $\log 5 - \log 9 = -\frac{t}{4}$, $0,7 - 2.0,48 = -\frac{t}{4}$

$-0,26 = \frac{-t}{4}$, $t = 1,04$.

Após 1,04 horas a temperatura subiria 4°C.

Exemplo Abaixo da Média



a) $T(t) = (T_0 - T_{ext}).10^{-t/4} + T_{ext}$

$T = (21 - 30).10^{-4/4} + 30$

$T = -9 .10^{-1} + 30$

$T = -0,9 + 30$

$\boxed{T = 29,1}$

b) $25 = (21-30)\,10^{-t/4} + 30$

$25 = -9.10^{-t/4} + 30$

$\log 25 = -\frac{t}{4} \log 9.10 + \log 30$

$\log 5.5 = -\frac{9t}{4} . \log 10 + \log 6.5$

$5. 0,70 = -\frac{9t}{4} + 6. 0,7$

$3,5 = -\frac{9t}{4} + 4,2$

$+\frac{9t}{4} = +0,7$

$t = \frac{2,8}{4}$

$\boxed{t = 0,7\,h}$

Comentários

Essa questão envolve o traçado do gráfico de uma função exponencial com expoente negativo e a manipulação de logaritmos, tópicos pouco assimilados pela maior parte dos alunos do ensino médio.
Muitos vestibulandos mostraram desconhecimento do gráfico da função exponencial, traçando curvas espúrias, como a reta apresentada no exemplo abaixo da média, ou curvas que continham pontos acima da reta horizontal T = 30ºC.
O cálculo do logaritmo de números negativos e a aplicação de propriedades inexistentes do logaritmo foram erros frequentemente cometidos no item **b**. Observe-se que, no exemplo abaixo da média, o candidato sugere que log(a+b) = log(a) + log(b) e que log 25 = log 5.5 = 5.log 5.
O exemplo acima da média mostra uma resolução bem feita, apesar de o gráfico não incluir todos os valores de t no intervalo [0, 6], como esperado.

8. Pedro precisa comprar *x* borrachas, *y* lápis e *z* canetas. Após fazer um levantamento em duas papelarias, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 23,00 pelo conjunto de borrachas, lápis e canetas, enquanto a papelaria B cobra R$ 25,00 pelo mesmo material. Em seu levantamento, Pedro descobriu que a papelaria A cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 2,00 pelo lápis e R$ 3,00 pela caneta e que a papelaria B cobra R$ 1,00 pela borracha, R$ 1,00 pelo lápis e R$ 4,00 pela caneta.

a) Forneça o número de lápis e de borrachas que Pedro precisa comprar em função do número de canetas que ele pretende adquirir.

b) Levando em conta que $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$, e que essas três variáveis são inteiras, determine todas as possíveis quantidades de lápis, borrachas e canetas que Pedro deseja comprar.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Os dados do enunciado nos permitem formular o seguinte sistema de equações lineares, no qual cada equação está associada a uma papelaria:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 23 \\ x + y + 4z &= 25 \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda linha por –2 e somando o resultado à primeira linha, obtemos $-x - 5z = -27$. Assim, $x = 27 - 5z$.
Subtraindo, agora, a segunda linha da primeira, obtemos $y - z = -2$, de modo que $y = z - 2$.

Resposta: $x = 27 - 5z$ e $y = z - 2$.

b) **(2 pontos)**
Tomando $y \geq 1$, temos $z - 2 \geq 1$, ou seja, $z \geq 3$. Da mesma forma, exigindo que $x \geq 1$, temos $27 - 5z \geq 1$, ou $z \leq 27/5$. Como z precisa ser um número inteiro, concluímos que $z \leq 5$. Assim, $3 \leq z \leq 5$.
Para z = 3, temos y = 1 e x = 12. Para z = 4, temos y = 2 e x = 7. Finalmente, para z = 5, temos y = 3 e x = 2.

Resposta: As quantidades possíveis são (x, y, z) = (12, 1, 3), ou (x, y, z) = (7, 2, 4), ou ainda (x, y, z) = (2, 3, 5).

Exemplo Acima da Média

a-) $\begin{cases} x+2y+3z=23 \\ x+y+4z=25 \end{cases}$

$25-y-4z+2y+3z=23$ $\quad\quad$ $x+z-2+4z=25$

$y=z-2$ $\quad\quad$ $x=27-5z$

Resposta: Pedro precisa comprar $(z-2)$ lápis e $(27-5z)$ borrachas.

b-) $27-5z \geq 2$ $\quad\quad$ $z-2 \geq 1$

$5z \leq 25$ $\quad\quad$ $z \geq 3$

$z \leq 5$

$\therefore$ se $z=3$, $x=12$ e $y=1$

se $z=4$, $x=7$ e $y=2$ $\quad\quad$ $S=\{(2,3,5),(7,2,4)$

se $z=5$, $x=2$ e $y=3$ $\quad\quad$ e $(12,1,3)\}$

Exemplo Abaixo da Média

a) A partir do enunciado tem-se o sistema:

$\begin{cases} x+2y+3z=23 \\ x+y+4z=25 \end{cases}$

de onde se tem: $\boxed{x+y=25-4z}$

b) Do sistema: $\begin{cases} x+2y+3z=23 \\ x+y+4z=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=23 \\ -y+z=2 \end{cases}$

do sistema: se $y=1$, $z=3$ e $x=12$

se $y=2$, $z=4$ e $x=7$

se $y=3$, $z=5$ e $x=2$

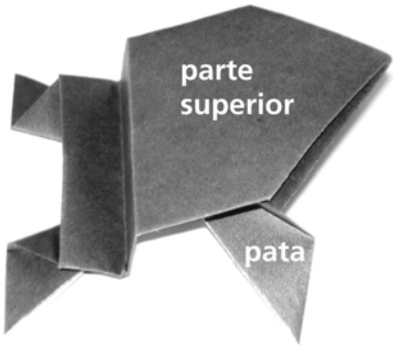
~~se y=4, z=6 e x=~~

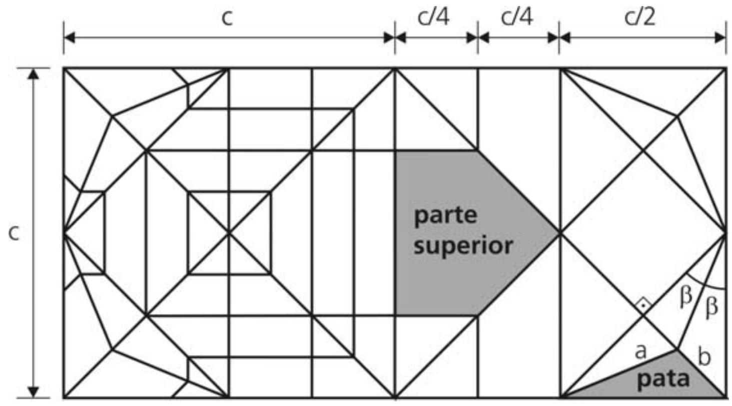
Comentários

Essa questão apresenta um sistema linear possível, mas indeterminado, composto por duas equações que relacionam três incógnitas. O objetivo do item **a** é apenas identificar quais candidatos sabem apresentar as soluções do sistema em função de uma das incógnitas. No item **b**, considerando que x, y e z precisam ser números naturais (excluído o zero), o vestibulando deve obter explicitamente todas as soluções do problema.

No exemplo abaixo da média, o candidato apresentou a equação $x + y = 25 - 4z$, em lugar de fornecer, isoladamente, x e y em função de z. Já no item **b**, a resposta, apesar de correta, não é acompanhada de qualquer justificativa, o que não é aceito pelo vestibular da UNICAMP.

9. A figura abaixo, à esquerda, mostra um sapo de *origami*, a arte japonesa das dobraduras de papel. A figura à direita mostra o diagrama usado para a confecção do sapo, na qual se utiliza um retângulo de papel com arestas iguais a **c** e **2c**. As linhas representam as dobras que devem ser feitas. As partes destacadas correspondem à parte superior e à pata direita do sapo, e são objeto das perguntas a seguir.





a) Quais devem ser as dimensões, em centímetros, do retângulo de papel usado para confeccionar um sapo cuja parte superior tem área igual a $12cm^2$?

b) Qual a razão entre os comprimentos das arestas **a** e **b** da pata direita do sapo?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

A parte superior do sapo é um pentágono. Sua área é dada pela soma das áreas de um retângulo e de um triângulo. O retângulo tem lados iguais a c/4 e c/2, de modo que sua área é de $(c/4)(c/2) = c^2/8$. O triângulo tem base igual a c/2 e altura c/4, fornecendo uma área de $(c/2)(c/4)/2 = c^2/16$. Logo, a área total da parte superior é de $3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2, é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, c = 8 cm.

Resposta: Para a parte superior do sapo ter $12cm^2$, é preciso que o retângulo tenha 8 x 16 cm.

a')

A parte superior do sapo é um pentágono, cuja área é o dobro da área de um trapézio com bases paralelas de comprimento c/4 e c/2, e com altura c/4. A área de tal trapézio é igual a $A_T = (1/2).(c/4 + c/2).(c/4) = 3c^2/32$. Logo, a área total da parte superior é $2A_T = 3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2, é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, c = 8 cm.

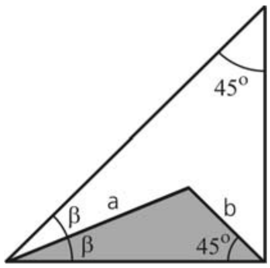
Resposta: Para a parte superior do sapo ter $12cm^2$, é preciso que o retângulo tenha 8 x 16 cm.

a'')

A parte superior do sapo é um pentágono, cuja área é dada por $A_G – 2A_P$, onde A_G é a área de um triângulo com base c e altura c/2, e A_P é a área de um triângulo com base e altura iguais a c/4. Assim, $A_G = c.(c/2)/2 = c^2/4$ e $A_P = (c/4)^2/2 = c^2/32$. Assim, a área do pentágono é de $c^2/4 – 2c^2/32 = 3c^2/16$. Para que essa área valha 12 cm^2, é preciso que $3c^2/16 = 12$, ou $c^2 = 64$. Logo, c = 8 cm.

Resposta: Para a parte superior do sapo ter $12cm^2$, é preciso que o retângulo tenha 8 x 16 cm.

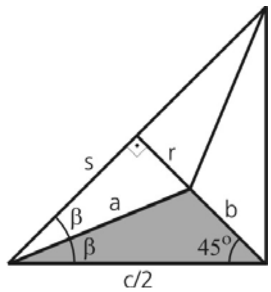
b) **(2 pontos)**



A partir da figura fornecida no enunciado, podemos concluir que 2β = 45º, de modo que β = 22,5º.
A lei dos senos nos fornece a equação a/sen(45º) = b/sen(22,5º), de modo que a/b = sen(45º)/sen(22,5º).
Como sen(45º) = sen(22,5º + 22,5º) = 2sen(22,5º)cos(22,5º), concluímos que a/b = 2cos(22,5º).
Para calcular cos(22,5º), usamos a fórmula cos(45º) = $\cos^2$(22,5º) – sen^2(22,5º), que fornece cos(45º) = 2$\cos^2$(22,5º) – 1. Deste modo, $\cos^2$(22,5º) = (cos(45º) + 1)/2 = $\left(\sqrt{2}+2\right)/4$. Logo, $\cos(22{,}5°)=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,/2$, donde $a/b=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

b')



Observando a figura ao lado, concluímos que 2β = 45º, de modo que β = 22,5º.
Assim, (r + b) = s. Mas r = a.sen(β) e s = a.cos(β), de modo que b = s – r = a[cos(β) – sen(β)]. Logo, a/b = 1/[cos(β) – sen(β)].
Para calcular cos(22,5º), usamos a fórmula cos(45º) = $\cos^2$(22,5º) – sen^2(22,5º), que fornece cos(45º) = 2$\cos^2$(22,5º) – 1. Deste modo, $\cos^2$(22,5º) = (cos(45º) + 1)/2 = $\left(\sqrt{2}+2\right)/4$. Logo, $\cos(22{,}5°)=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,/2$.
Para obter sen(22,5º), basta fazer $\text{sen}(22{,}5°)=\sqrt{1-\cos^2(22{,}5°)}=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,/2$. Assim, $a/b=2\Big/\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2\Big/\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$.

b'')

Observando a figura do item (b'), concluímos que 2β = 45º, de modo que β = 22,5º.
Pelo teorema da bissetriz interna, temos s/r = (c/2)/b. Como (c/2) é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem s, temos também $(c/2)^2=2s^2$, ou $c/2=s\sqrt{2}$.
Voltando ao teorema, obtemos $s/r=s\sqrt{2}/b$, ou simplesmente $b=r\sqrt{2}$. Mas r = a.sen(β), de modo que $b=a.\text{sen}(\beta)\sqrt{2}$, o que implica que $a/b=1\Big/\left[\text{sen}(\beta)\sqrt{2}\right]$.
Para calcular sen(22,5º), usamos a fórmula cos(45º) = $\cos^2$(22,5º) – sen^2(22,5º), que fornece cos(45º) = 1 – 2sen^2(22,5º). Deste modo, sen^2(22,5º) = (1 – cos(45º))/2 = $\left(2-\sqrt{2}\right)/4$, e $\text{sen}(22{,}5°)=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,/2$.
Logo, $a/b=2\Big/\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2\Big/\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

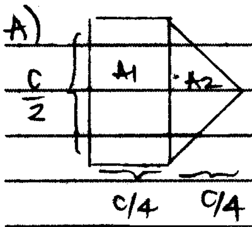
b''')

Observando a figura do item (b'), concluímos que $2\beta = 45°$, de modo que $\beta = 22{,}5°$.
A lei dos cossenos nos fornece a equação $b^2 = (c/2)^2 + a^2 - 2a(c/2)\cos(\beta)$.
Como $(c/2)$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem s, temos $(c/2)^2 = 2s^2$, ou $c/2 = s\sqrt{2}$. Assim, $b^2 = (s\sqrt{2})^2 + a^2 - 2as\sqrt{2}\cos(\beta)$.
Usando a relação $s = a.\cos(\beta)$, obtemos $b^2 = 2a^2\cos^2(\beta) + a^2 - 2a^2\sqrt{2}\cos^2(\beta)$, de modo que $b^2/a^2 = (2 - 2\sqrt{2})\cos^2(\beta) + 1$. Logo, $a/b = 1\big/\sqrt{(2 - 2\sqrt{2})\cos^2(\beta) + 1}$.
Para calcular $\cos^2(22{,}5°)$, usamos a fórmula $\cos(45°) = \cos^2(22{,}5°) - \text{sen}^2(22{,}5°)$, que fornece $\cos(45°) = 2\cos^2(22{,}5°) - 1$. Deste modo, $\cos^2(22{,}5°) = (\cos(45°) + 1)/2 = \left(\sqrt{2} + 2\right)/4$. Logo, $a/b = 2\big/\sqrt{(2 - 2\sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) + 4} = 2\big/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Resposta: A razão entre as duas arestas é igual a $2\big/\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Exemplo Acima da Média

A)



$A1 = \frac{c}{2}\cdot\frac{c}{4} = \frac{c^2}{8}$

$A2 = \frac{c}{2}\cdot\frac{c}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{c^2}{16}$

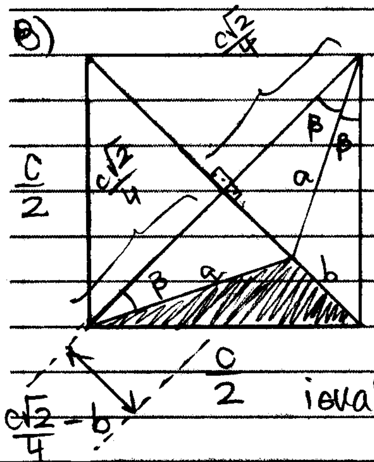
$\frac{2c^2}{16} + \frac{c^2}{16} = 12$

$\frac{3c^2}{16} = 12 \rightarrow c^2 = 4.16$

$c = 24 = 8\text{ cm}$

Resp: o retângulo deve ter 8 x 16cm.

B)



$\cos\beta = \frac{c\sqrt{2}}{4a}$ ① $b^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - \cancel{2}a\cdot\frac{c}{\cancel{2}}\cos\beta$

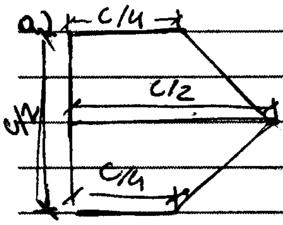
$\frac{c}{2}$ $b^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - \cancel{a}.c.\frac{c\sqrt{2}}{4\cancel{a}} \rightarrow b^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2\sqrt{2}}{4}$

② $a^2 = \left(\frac{c\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{2}}{4} - b\right)^2 \rightarrow b^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{cb\sqrt{2}}{2}$

igualando: $\cancel{a^2} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2\sqrt{2}}{4} = \cancel{a^2} - \frac{c^2}{4} - \frac{cb\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{c = 2b}$

substituindo: $b^2 = a^2 - \frac{(2b)^2}{4} - \frac{2b^2\sqrt{2}}{2} \rightarrow b^2(2+\sqrt{2}) = a^2 \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

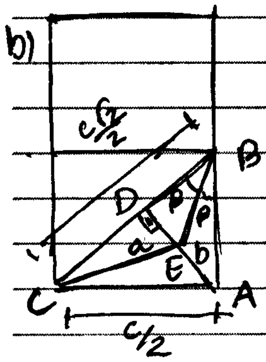
Exemplo Abaixo da Média

a) 

$S = \frac{\cancel{2}\cdot(c/4 + c/2)}{\cancel{2}}\cdot\frac{c}{2} = \left(\frac{c}{4} + \frac{2c}{4}\right)\cdot\frac{c}{2} = \frac{3c^2}{8}$

$\frac{3c^2}{8} = S = 12cm^2 \Leftrightarrow \frac{\cancel{3}c^2}{8} = 1\cancel{2}^{4} \Leftrightarrow c = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ O retângulo deverá ter dimensões iguais a $4\sqrt{2}$ e $8\sqrt{2}$. //

b) 

• Como $2\beta = 45°$, $AB = CA$, e $B\hat{A}C$ é retângulo $\Leftrightarrow$ DBA é isósceles e retângulo $\Leftrightarrow$ BE é bissetriz de $D\hat{B}A$ e E é ponto médio de $AD = 2b$ $\Leftrightarrow$

$b = AD/2 = \frac{c\sqrt{2}}{8}$

$a^2 = DE^2 + CD^2 = \left(\frac{c\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{c\cdot 2}{16} + \frac{c\cdot 2}{32}$

$\Leftrightarrow a = \frac{c\sqrt{10}}{8}$

• $\frac{a}{b} = \frac{\cancel{c}\sqrt{10}/\cancel{8}}{\cancel{c}\sqrt{2}/\cancel{8}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{5}$ //

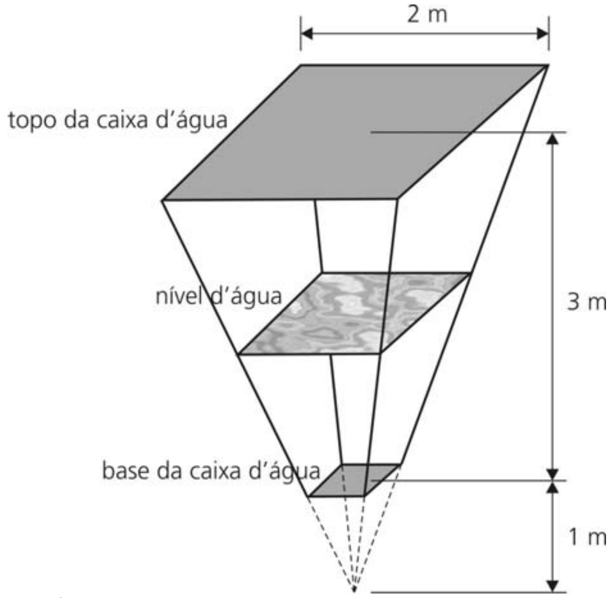
Comentários

Essa questão contém um item que é fácil e envolve apenas o cálculo da área de um pentágono, e outro item, bem mais difícil, que combina tópicos mais avançados de geometria plana e trigonometria. Como consequência, muitos candidatos responderam corretamente ao item **a**, mas poucos alcançaram 3 ou 4 pontos.

O exemplo acima da média mostra uma variante da resolução **b'''**, na qual a lei dos cossenos é combinada com a expressão $\cos(\beta) = s / a = c\sqrt{2}/(4a)$.

No exemplo abaixo da média, o candidato dividiu o pentágono em dois trapézios iguais, mas considerou que a altura desses trapézios era c/2, em lugar de c/4. Erros simples como esse tiraram pontos preciosos de muitos vestibulandos. No item **b**, o mesmo candidato supôs que r = b (ver figura da resolução **b'**), o que o impediu de obter a resposta correta.

10. Uma caixa d'água tem o formato de um tronco de pirâmide de bases quadradas e paralelas, como mostra a figura abaixo, na qual são apresentadas as medidas referentes ao interior da caixa.

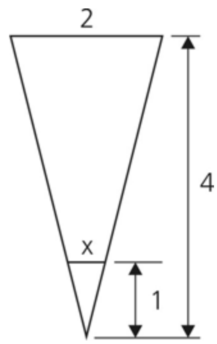


a) Qual o volume **total** da caixa d'água?

b) Se a caixa contém (13/6) m^3 de água, a que altura de sua base está o nível d'água?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**



Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura ao lado. Usando a semelhança de triângulos, constatamos que 2/4 = x/1, ou seja, x = 1/2.

O volume da pirâmide maior é igual a $V_G = A_G.h_G/3$, em que A_G é a área do quadrado de aresta 2 m e h_G = 4 m. Assim, V_G = 2.2.4/3 = 16/3 m^3.

O volume da pirâmide menor é dado por $V_P = A_P.h_P/3$, em que a_P é a área do quadrado de aresta (1/2) m e h_P = 1 m. Assim, V_P = (1/2).(1/2).1/3 = 1/12 m^3.

O volume do tronco de pirâmide é $V_G - V_P$ = 16/3 – 1/12 = 63/12 = 21/4 m^3.

Resposta: A caixa d'água comporta 21/4 m^3.

a')

Fazendo um corte vertical na caixa d'água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura acima. A pirâmide de altura 1, cuja base tem aresta x, é semelhante à pirâmide de altura 4, cuja base tem aresta 2. A razão entre os volumes dessas pirâmides é igual ao cubo da razão entre as alturas, ou seja, $V_P/V_G = 1/4^3$ = 1/64. Assim, o volume da pirâmide menor é $V_P = V_G/64$.

O volume da caixa d'água é igual a $V_G - V_P = (1 - 1/64)A_G.h_G/3$ = (63/64).2.2.4/3 = 21/4 m^3.

Resposta: A caixa d'água comporta 21/4 m^3.

a’’)
Fazendo um corte vertical na caixa d’água, de modo a dividir cada base do tronco de pirâmide em dois retângulos iguais, obtemos a figura acima, a partir da qual, usando a semelhança de triângulos, constatamos que 2/4 = x/1, ou seja, x = 1/2.

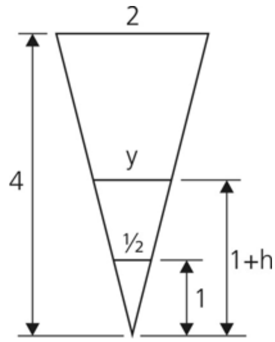
O volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas é dado por $V = \left(\frac{h}{3}\right)\left(A_G + A_P + \sqrt{A_G A_P}\right)$, onde h é a altura do tronco de pirâmide, e A_G e A_P são as áreas de suas bases.

Para o tronco em questão, temos $A_G = 2^2 = 4$, $A_P = (1/2)^2 = 1/4$ e h = 3. Logo, $V = \left(\frac{3}{3}\right)\left(4 + (1/4) + \sqrt{4.(1/4)}\right)$, ou V = 21/4 m^3.

Resposta: A caixa d’água comporta 21/4 m^3.

b) **(2 pontos)**
Seja h a altura do nível d’água e y o comprimento da aresta da seção quadrada do tronco de pirâmide que está a uma altura h da base inferior da caixa d’água (ver figura ao lado). Usando novamente a semelhança de triângulos, obtemos y/(1 + h) = 2/4, ou h = 2y – 1.

O volume d’água até a altura h é dado por $V = A_B.(h + 1)/3 - 1/12 = y^2(2y - 1 + 1)/3 - 1/12$. Assim, $V = 2y^3/3 - 1/12$. Se V = 13/6, então $(8y^3 - 1)/12 = 13/6$, ou $8y^3 = 27$. Logo, $y = \sqrt[3]{27/8} = 3/2$ m e h = 2y – 1 = 2 m.



Resposta: O nível d’água está a 2 m da base menor da caixa d’água.

b’)
Seja h a altura do nível d’água e y o comprimento da aresta da seção quadrada do tronco de pirâmide que está a uma altura h da base inferior da caixa d’água (ver figura acima). Usando, novamente, a semelhança de triângulos, obtemos (1 + h)/y = 4/2, ou y = (1 + h)/2.

O volume d’água até a altura h é dado por $V = A_B.(h + 1)/3 - 1/12 = (1 + h)^3/12 - 1/12$. Se V = 13/6, então $[(1 + h)^3 - 1]/12 = 13/6$, ou $(1 + h)^3 = 27$. Logo, (1 + h) $(1+h) = \sqrt[3]{27} = 3$ m e h = 3 – 1 = 2 m.

Resposta: O nível d’água está a 2 m da base menor da caixa d’água.

b’’)
Sejam h a altura do nível d’água (ver figura acima), V_P o volume da pirâmide de altura 1 e V o volume do tronco de pirâmide. Neste caso, o volume da pirâmide de altura (h + 1) é igual a $V_N = V + V_P$. Assim, $V_N = 13/6 + 1/12 = 9/4$ m^3.

Usando a semelhança das pirâmides, concluímos que $V_N/V_P = (1 + h)^3/1^3$, donde $(1 + h)^3 = (9/4)/(1/12) = 27$. Obtemos, assim, $1 + h = \sqrt[3]{27} = 3$, de modo que h = 2 m.

Resposta: O nível d’água está a 2 m da base menor da caixa d’água.

Exemplo Acima da Média

a) Volume da pirâmide completa: $V = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$

Volume da pirâmide menor: $V = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{12}$

• Cálculo do lado da pirâmide menor:

$2m — \ell$ $\quad \underline{\ell = 0{,}5m}$

$4m — 1m$

Volume da caixa d'água:

$V = V_T - V_{PM} = \frac{16}{3} - \frac{1}{12} = \frac{64-1}{12}$

$\boxed{V_{CA} = 63/12\ m^3}$

b) Volume da pirâmide com base no nível de água:

$V_T = \frac{13}{6} + \frac{1}{12} = \frac{26+1}{12} = \frac{27}{12}\ m^3$

$\frac{27}{12} = \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot h$ e $\cancel{2}m — \ell$ $\quad \boxed{h = 2\ell}$

$\quad {}^{2}\cancel{4}m — h$

$\frac{27}{\cancel{4}} = \frac{1}{\cancel{4}} h^2 \cdot h$ $\quad h^3 = 27$ $\quad \boxed{h = 3m}$

Sendo a altura da pirâmide 3m, então o nível de água está a 2m da base da caixa d'água.

Exemplo Abaixo da Média

lado $\cancel{\text{Ab}}$pq: $\frac{2}{x} = \frac{3}{1}$

a) $V = \frac{1}{3} Ab \cdot h_T - \frac{1}{3} Ab_{pq} \cdot 1$

~~lado~~ lado$_p$ = $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1$

$V = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow V = \frac{16}{3} - \frac{4}{27} \Rightarrow V = \frac{432-12}{81} \cong 5{,}18\ m^3$

b) $\frac{13}{6}m^3 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot h - \frac{4}{27} \Rightarrow \frac{13}{6} = \frac{4h}{3} - \frac{4}{27} \Rightarrow$

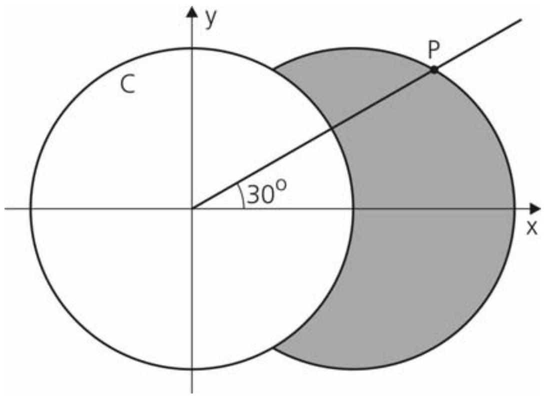
$\Rightarrow \frac{4h}{3} = \frac{13}{6} + \frac{4}{27} \Rightarrow \frac{4h}{3} = \frac{351+24}{162} \Rightarrow \frac{4h}{3} = \frac{375}{162}$

$\Rightarrow 4h \cdot 162 = 375 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{h = \frac{1125}{648}}$

Comentários

Esta questão apresenta uma aplicação prática de geometria espacial envolvendo o tronco de uma pirâmide. O passo mais difícil e importante do problema é a determinação da relação entre as alturas e as arestas das bases, ou entre as alturas e os volumes das pirâmides. A dificuldade encontrada pelos alunos do ensino médio em obter a proporção correta é ilustrada no exemplo abaixo da média, em que o candidato usa uma regra de três inválida para determinar x. No item **b**, o candidato erra novamente ao considerar que a área da seção da pirâmide na altura do nível d'água é igual a 4, ou seja, é independente de h.
O exemplo acima da média mostra uma das muitas formas diferentes de se obter a solução do item **b**.

11. A circunferência de centro em (2, 0) e tangente ao eixo y é interceptada pela circunferência C, definida pela equação $x^2 + y^2 = 4$, e pela semi-reta que parte da origem e faz ângulo de 30° com o eixo-x, conforme a figura abaixo.



a) Determine as coordenadas do ponto P.

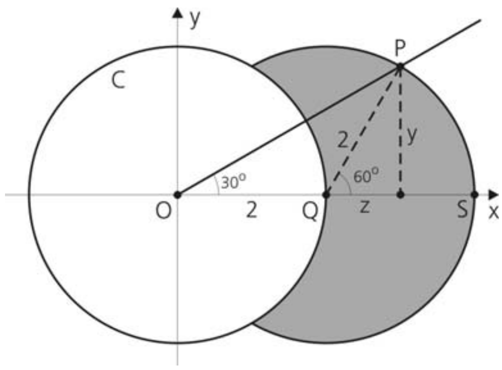
b) Calcule a área da região sombreada.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Como o ponto P está sobre a circunferência, suas coordenadas satisfazem $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Ao mesmo tempo, por P estar sobre a semirreta, temos $y/x = \tan(30°) = \sqrt{3}/3$, ou seja, $y = x\sqrt{3}/3$.
Voltando à primeira equação, obtemos $(x-2)^2 + (x\sqrt{3}/3)^2 = 4$. Deste modo, $x(4x/3 - 4) = 0$. Logo, os pontos de interseção da semirreta com a circunferência centrada em (2, 0) têm abscissas x = 0 e x = 3. Como P é o ponto de interseção com maior abscissa, concluímos que x = 3 e $y = x\sqrt{3}/3 = \sqrt{3}$.

Resposta: Em P, x = 3 e $y = \sqrt{3}$.

a')
Como observamos na figura ao lado, o ângulo $S\hat{O}P$ está inscrito na circunferência de centro Q. Assim, sua medida é igual à metade da medida do ângulo central $S\hat{Q}P$. Logo, o segmento de reta PQ faz um ângulo de 60° com o eixo x.
Além disso, esse segmento mede 2. Assim, temos sen(60°) = y/2 e cos(60°) = z/2. Desta forma, y = 2sen(60°) = $\sqrt{3}$, e x = 2 + z = 2 + 2cos(60°) = 2 + 1 = 3.

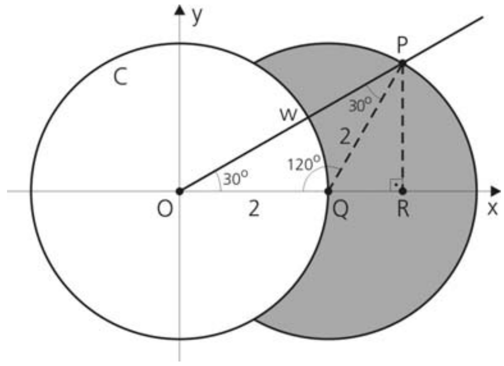


Resposta: Em P, x = 3 e $y = \sqrt{3}$.

a'')
Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OQP (ver figura ao lado), obtemos $w^2 = 2^2 + 2^2 - 2.2.2.\cos(120°) = 2^2 + 2^2 + 2.2.2.\cos(60°) = 8 + 8.(1/2) = 12$. Logo, $w = 2\sqrt{3}$. Usando, então, o triângulo POR, obtemos as coordenadas do ponto P:

$$y = w.\text{sen}(30°) = 2\sqrt{3}.(1/2) = \sqrt{3}.$$

$$x = w.\cos(30°) = 2\sqrt{3}.(\sqrt{3}/2) = 3.$$

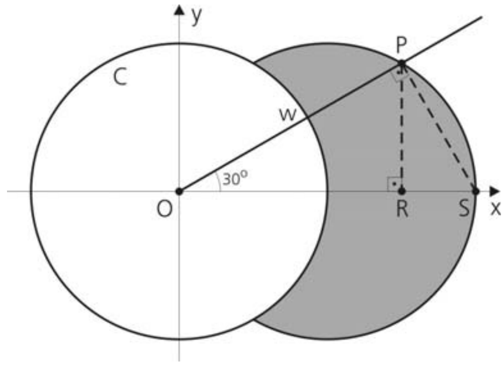


Resposta: Em P, x = 3 e y = $\sqrt{3}$ **.**

a''')
Como se observa na figura ao lado, o triângulo OPS é retângulo, pois a aresta OS é um diâmetro da circunferência centrada no ponto (2, 0). Além disso, por ser a hipotenusa do triângulo OPS, a aresta OS mede 4. Assim, $w = 4\cos(30°) = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$.
Recorrendo, então, ao triângulo OPR, que também é retângulo, obtemos as coordenadas do ponto P:

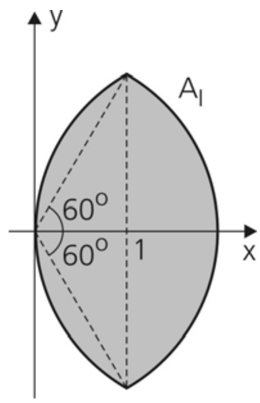
$$y = w.\text{sen}(30°) = 2\sqrt{3}.(1/2) = \sqrt{3}.$$

$$x = w.\cos(30°) = 2\sqrt{3}.(\sqrt{3}/2) = 3.$$



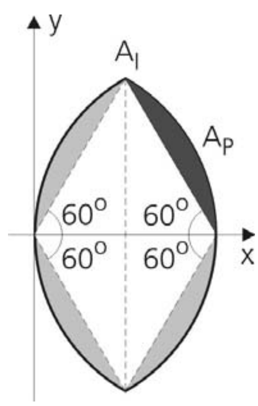
Resposta: Em P, x = 3 e y = $\sqrt{3}$ **.**

b) **(2 pontos)**
A área da região sombreada corresponde a $A_C - A_I$, em que A_C é a área do círculo de raio 2 e A_I é a área da interseção dos dois círculos. Os pontos de interseção das duas circunferências satisfazem $x^2 + y^2 = 4$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Assim, concluímos que $x = 1$ e $y = \pm\sqrt{3}$.
Como o segmento de reta que liga a origem ao ponto de interseção no primeiro quadrante tem comprimento 2, podemos concluir que o cosseno do ângulo entre este segmento e o eixo x vale 1/2, de modo que o ângulo é igual a 60°.
A figura ao lado indica que $A_I = 2(A_S - A_T)$, onde A_S é a área do setor circular com ângulo de 120°, e A_T é a área do triângulo de base $2\sqrt{3}$ e altura 1. Assim, $A_I = 2(\pi 2^2/3 - 1 \cdot 2\sqrt{3}/2) = 8\pi/3 - 2\sqrt{3}$. Logo a área desejada é $A_C - A_I = \pi 2^2 - 8\pi/3 + 2\sqrt{3} = 4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.



Resposta: A região sombreada tem área igual a $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$ **.**

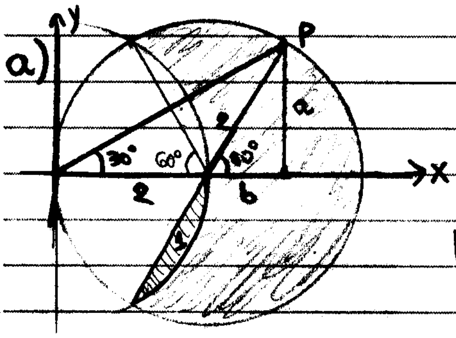
b')
Seja A_I a área da interseção dos dois círculos, conforme a figura ao lado. Dividindo A_I ao meio, na horizontal, podemos inscrever na região resultante um triângulo equilátero de arestas iguais a 2. A área desse triângulo é $A_T = 2^2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}$.
Já a área da região A_P, indicada na figura, é a diferença entre a área de um setor circular e a área do triângulo equilátero, ou seja, $A_P = r^2\theta/2 - A_T$. Assim, $A_P = 2^2(\pi/3)/2 - \sqrt{3} = 2\pi/3 - \sqrt{3}$. Como $A_I = 2A_T + 4A_P$, temos $A_I = 8\pi/3 - 2\sqrt{3}$.
A área desejada corresponde a $A_C - A_I$, em que A_C é a área do círculo de raio 2. Deste modo, a área desejada é $\pi 2^2 - 8\pi/3 + 2\sqrt{3} = 4\pi/3 + 2\sqrt{3}$.



Resposta: A região sombreada tem área igual a $4\pi/3 + 2\sqrt{3}$ **.**

Exemplo Acima da Média

a)



$a = 2 \cdot \text{sen}60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$b = 2 \cdot \cos 60° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

R: P localiza-se no ponto $(3, \sqrt{3})$

b) $A_1 = A_{setor 60°} - A_{\Delta eq} = \frac{60\pi \cdot 2^2}{360} - \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi}{6} - \frac{4\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3}}$

$A_{somb} = A_{setor 240°} - 2 \cdot A_1 = \frac{240 \cdot 2^2\pi}{360} - 2 \cdot \left(\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} =$

$= \boxed{\frac{4\pi + 2\sqrt{3}}{3}}$

R: A área sombreada vale $\left(\frac{4\pi + 2\sqrt{3}}{3}\right) u^2$. Se considerarmos $\pi = 3$, a área então é de $(4 + 2\sqrt{3}) u^2$.

Exemplo Abaixo da Média

a) A circunferência de centro $(2,0)$ tem raio também igual a 2, semelhante à circunferência C.

$(x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \therefore \quad x \cdot (x-2) + y^2 = 0 . \qquad P(x, y).$

A reta tem equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x \quad \therefore$

$x \cdot (x-2) + \frac{1}{3} \cdot x^2 = 0 \quad \therefore \quad x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^2 - 2x = 0 \quad \therefore \quad 4x^2 - 6x = 0$

$\Delta = 36 \quad \therefore \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36}}{8} \quad \therefore \quad x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad ; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) A interseção entre às circunferências é um espaço semelhante a uma elipse. Sua área pode ser calculada com $A = \pi \cdot a \cdot b$, onde a e b são as dimensões dos extremos.

$A_{SOMBREADA} = \pi R^2 - \pi ab = \pi \cdot (R^2 - a \cdot b) = \pi \cdot (4 - 2 \cdot b)$, b tem a mesma ordenada de P, ou seja, $b = 2 \cdot y_P = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$A_{SOMB.} = \pi \cdot (4 - 2\sqrt{3})$.

Comentários

Essa questão combina geometria analítica, geometria plana e trigonometria, tópicos considerados difíceis pelos alunos do ensino médio. Como consequência da dificuldade da questão, muitos candidatos tentaram resolver o item **a** medindo distâncias com o auxílio de uma régua, o que não era apropriado. Muitos também não justificaram ou forneceram informações pouco claras sobre o que fizeram para obter as respostas, perdendo os pontos da questão.

No exemplo abaixo da média, o candidato converte erroneamente $(x-2)^2$ em $x(x-2)+4$ no item **a**. Já em **b**, ele falha ao aproximar a interseção dos dois círculos por uma elipse.

No exemplo acima da média, o candidato responde ao item **b** seguindo um caminho diferente para obter a solução, mas usa a aproximação grosseira $\pi \approx 3$ no final. Cabe ressaltar que muitos vestibulandos, acreditando ser relevante fornecer a resposta na forma decimal, por aproximação, tomam π por 3 e $\sqrt{3}$ por 1,7. Observando as respostas fornecidas acima, nas quais esses números irracionais aparecem explicitamente, pode-se constatar que essa conversão não é necessária. De fato, ela é inconveniente, pois, além de produzir uma resposta imprecisa, pode dar margem a erros de conta.

12. Seja $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ um polinômio de grau n tal que $a_n \neq 0$ e $a_j \in IR$ para qualquer j entre 0 e n. Seja $g(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$ o polinômio de grau $n-1$ em que os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os mesmos empregados na definição de f(x).

a) Supondo que n = 2, mostre que $g\left(x+\dfrac{h}{2}\right)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, para todo $x, h \in IR, h \neq 0$.

b) Supondo que n = 3 e que $a_3 = 1$, determine a expressão do polinômio f(x), sabendo que f(1) = g(1) = f(–1) = 0.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Se n = 2, então $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ e $f(x+h)=a_2(x+h)^2+a_1(x+h)+a_0$. Assim,

$$f(x+h)=a_2x^2+2a_2xh+a_2h^2+a_1x+a_1h+a_0=f(x)+2a_2xh+a_2h^2+a_1h=f(x)+h(2a_2x+a_1+a_2h).$$

Logo, $\left[f(x+h)-f(x)\right]/h=2a_2x+a_1+a_2h$. Por outro lado, $g(x)=2a_2x+a_1$ e

$$g(x+h/2)=2a_2(x+h/2)+a_1=2a_2x+a_2h+a_1=[f(x+h)-f(x)]/h.$$

b) **(2 pontos)**

Se n = 3 e $a_3 = 1$, então $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ e $g(x)=3x^2+2a_2x+a_1$. Como f(1) = g(1) = f(–1) = 0, temos o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcl} f(1) & = & 1+a_2+a_1+a_0 & = & 0 \\ f(-1) & = & -1+a_2-a_1+a_0 & = & 0 \\ g(1) & = & 3+2a_2+a_1 & = & 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcr} a_0+a_1+a_2 & = & -1 \\ a_0-a_1+a_2 & = & 1. \\ a_1+2a_2 & = & -3 \end{array}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos $2a_1 = -2$, de modo que $a_1 = -1$. Em seguida, da terceira equação deduzimos que $-1+2a_2=-3$, ou $a_2 = -1$. Finalmente, da primeira equação obtemos $a_0 - 1 - 1 = -1$, de modo que $a_0 = 1$.

Resposta: O polinômio é $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

b')

Se $n = 3$ e $a_3 = 1$, então $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$. Como $f(1) = f(-1) = 0$, observamos que $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ são raízes do polinômio. Chamando de x_3 a terceira raiz, temos $f(x) = (x - 1)(x+1)(x - x_3) = x^3 - x_3x^2 - x + x_3$. Assim, $a_2 = -x_3$, $a1 = -1$ e $a_0 = x_3 = -a_2$. Como $g(1) = 0$, temos $3 + 2a_2 + a_1 = 0$, donde $a_2 = (-3 - a_1)/2 = -1$. Logo, $a_0 = 1$.

Resposta: O polinômio é $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Exemplo Acima da Média

$$a)\ f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$g(x)=2a_2x+a_1$$
$$g\left(x+\frac{h}{2}\right)=2a_2\left(x+\frac{h}{2}\right)+a_1$$
$$g\left(x+\frac{h}{2}\right)=2a_2x+a_2h+a_1$$
$$f(x+h)=a_2(x+h)^2+a_1(x+h)+a_0$$
$$f(x+h)=a_2x^2+2a_2xh+a_2h^2+a_1x+a_1h+a_0$$
$$f(x+h)-f(x)=a_2x^2+2a_2xh+a_2h^2+a_1x+a_1h+a_0-a_2x^2-a_1x-a_0$$
$$f(x+h)-f(x)=2a_2xh+a_2h^2+a_1h$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2a_2xh+a_2h^2+a_1h}{h}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2a_2x+a_2h+a_1$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$b)\ f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \Rightarrow x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$g(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1 \Rightarrow 3x^2+2a_2x+a_1$$
$$f(1)=0$$
$$1+a_2+a_1+a_0=0 \Rightarrow a_0+a_1+a_2=-1$$
$$f(-1)=0 \Rightarrow -1+a_2-a_1+a_0=0$$
$$a_0-a_1+a_2=1$$
$$g(1)=0 \Rightarrow 3+2a_2+a_1=0$$
$$a_1+2a_2=-3$$
$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2=-1 \\ a_0-a_1+a_2=1 \end{cases} \ominus$$
$$a_1+2a_2=-3$$
$$2a_1=-2 \qquad a_0-a_1+a_2=1$$
$$\boxed{a_1=-1} \qquad a_0+1-1=1$$
$$a_1+2a_2=-3 \qquad \boxed{a_0=1}$$
$$-1+2a_2=-3 \qquad \boxed{f(x)=x^3-x^2-x+1}$$
$$2a_2=-2$$
$$\boxed{a_2=-1}$$

Exemplo Abaixo da Média

a.) $2 \cdot a_2\left(x+\frac{h}{2}\right)^{2-1} + (2-1)a_{2-1}\left(x+\frac{h}{2}\right)^{2-2} + \ldots + 2a_2\left(x+\frac{h}{2}\right) + a_1 = \underline{a_2(x+h)^2 + a_{2-1}(x+h)^{2-1} + \ldots + \cancel{a_1 x} + \cancel{a_0} - (a_2 x^2 +}$

$\underline{a_{2-1}x^{2-1} + \ldots + a_1 x + a_0)}$ $\rightarrow$ $2a_2 x + a_2 h + a_1 + \ldots + 2a_2 x + a_2 h + a_1 = \underbrace{a_2(x^2 + xh + h^2) + a_1 x + a_1 h + \ldots - a_2 x^2 + a_1 x}_{h}$

h

$4a_2 x + 2a_2 h + 2a_1 = \underbrace{\cancel{a_2 x^2} + a_2 xh + a_2 h^2 - \cancel{a_2 x^2} - a_1 x}_{h}$ $\rightarrow$ $\boxed{4a_2 x + 2a_2 h + 2a_1 = a_2 x + a_2 h - \frac{a_1 x}{h}}$

b.) $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + \ldots + a_1 x + a_0$

$f(1) = a_3(1)^3 + a_2(1)^2 + \ldots + a_1(1) + a_0$

$0 = 1 + a_2 + \ldots + a_1 + a_0$

$\boxed{a_0 + a_1 + \ldots + a_2 = -1}$

$f(-1) = 1 \cdot (-1)^3 + a_2(-1)^2 + \ldots + a_1(-1) + a_0$

$0 = -1 + a_2 + \ldots + a_1 + a_0$

$a_2 + \ldots - a_1 + a_0 = 1$

$\boxed{a_1 = a_2 + a_0 - 1}$

$f(x) = 1x^3 + 0x^2 + \ldots + (-1)x + 0$

$\boxed{f(x) = x^3 + \ldots - x}$ //

$a_0 + a_2 + a_0 - \cancel{1} + a_2 = -\cancel{1}$

$2a_0 + 2a_2 = 0 \quad :2$

$\boxed{a_0 = 0}$

$g(1) = 3a_3(1)^2 + 2 \cdot a_1(1)^1 + 2a_2 1 + a_1$

$0 = 3 + 3a_1 + 2a_2$

$-3 = 3(a_2 + a_0 - 1) + 2a_2$

$\rightarrow 3a_2 + 3a_0 + 2a_2 = 0$

$3a_0 + 5a_2 = 0$

$3(-a_2) + 5a_2 = 0$

$2a_2 = 0$ $\boxed{a_2 = 0}$

Comentários

Essa é uma questão simples, que envolve apenas operações básicas com polinômios e a resolução de um sistema linear. Apesar disso, ela apresentou a menor nota média de toda a prova de matemática. Em parte, isso se deve ao fato de a questão ser a última e muitos candidatos não terem tido tempo de resolvê-la. Entretanto, as muitas respostas incorretas indicam que um número expressivo de alunos do ensino médio tem dificuldade de trabalhar com expressões algébricas, errando em passagens simples que vão desde a expansão de $(x + h)^2$ à simplificação de expressões.

O exemplo abaixo da média mostra claramente a dificuldade do candidato em converter uma expressão geral para o caso em que n é dado. Observa-se que o vestibulando repete termos e mantém as reticências ao definir os polinômios tanto no item **a** como no item **b**. Além disso, ele não informa claramente quais são as funções f e g, erra contas no item **b** e fornece a resposta desse item na forma f(x) = x^3 + ...– x, o que, naturalmente, não é aceitável.