1 A Paridade do Poder de Compra (PPC) é a teoria segundo a qual, a longo prazo, a taxa de câmbio entre as moedas de dois países tende a se mover para a taxa que igualaria os preços de uma cesta idêntica de produtos e serviços nos dois países. Nesse caso, diríamos que o custo de vida (baseado na cesta de comparação), nos dois países, é igual.

Quando há diferença entre os preços da cesta de comparação entre os dois países, podemos interpretá-la ou como um desequilíbrio na taxa de câmbio ou como um desequilíbrio no custo da cesta de comparação dos dois países.

O Índice BigMac, divulgado pela revista britânica *The Economist* e baseado na PPC, usa como único produto na sua cesta de comparação o sanduiche BigMac.

Em julho de 2013, um BigMac custava US$ 4,56 nos Estados Unidos e R$ 12,00 no Brasil. A taxa de câmbio média era de US$ 1,00 = R$ 2,27.

Supondo que a taxa de câmbio esteja equilibrada segundo a PPC, o que você diria em termos percentuais sobre o preço do BigMac no Brasil, comparado com o preço nos Estados Unidos?

Uma solução:

Supondo que a taxa de câmbio está equilibrada, um BigMac nos Estados Unidos custa, em reais, $4{,}56 \times 2{,}27 = 10{,}35$. Comparando o preço no Brasil com o preço nos Estados Unidos tem-se: $\frac{12{,}00}{10{,}35} \cong 1{,}159$, ou seja, 15,9% mais caro.

2 Uma conhecida artista disse recentemente: "Eu sempre soube que teria uma neta!".
Essa artista tem seis netos.

Supondo que a probabilidade de nascimento de crianças do sexo feminino ou masculino é a mesma, calcule, em porcentagem, a probabilidade de uma pessoa que tem seis netos ter pelo menos um deles do sexo feminino.

Uma solução:

Cada criança (neto) tem duas possibilidades equiprováveis para nascer: sexo feminino ou sexo masculino. As seis crianças têm $2\times2\times2\times2\times2\times2=64$ possibilidades equiprováveis para nascer, das quais, apenas em uma delas não haveria criança do sexo feminino. Tem-se, portanto, 63 possibilidades favoráveis a que pelo menos uma das crianças (netos) seja do sexo feminino.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{63}{64}\cong 0{,}984=98{,}4\%$.

3 Com uma nota de R$ 50,00, deseja-se comprar 20 selos dos correios, de valores iguais a R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 5,00, havendo pelo menos um de cada valor e sem que haja troco ou falte R$ 1,00 sequer.

A De quantas maneiras é possível fazer essa compra?

B Quantos selos de cada valor serão comprados, no caso em que a quantidade de selos de R$ 1,00 for a maior possível?

Uma solução:

a) Sejam *x*, *y* e *z* as quantidades de selos, respectivamente, de R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 5,00. Assim, deve-se ter:

$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+2y+5z=50 \end{cases}$, onde *x*, *y* e *z* são naturais não nulos.

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se:

$y+4z=30 \Rightarrow y=30-4z$.

Substituindo na primeira equação vem: $x+30-4z+z=20 \Rightarrow x=3z-10$.

Como *x* e *y* são naturais não nulos, deve-se ter: $\begin{cases} 30-4z>0 \Rightarrow z<\dfrac{15}{2} \\ 3z-10>0 \Rightarrow z>\dfrac{10}{3} \end{cases}$

Há, portanto, quatro possíveis valores para *z*: 4, 5, 6 e 7. Como, para cada um desses valores obtém-se valores naturais não nulos para *x* e para *y*, há também quatro soluções, isto é, quatro maneiras diferentes de fazer a compra.

b) Para que *x* seja o maior possível, como $x=3z-10$, então *z* também deverá ser o maior possível, isto é, $z=7$. Daí tem-se: $x=11$ e $y=2$.

Logo, serão comprados 11 selos de R$ 1,00, 2 selos de R$ 2,00 e 7 selos de R$ 5,00.

4 No espaço cartesiano bidimensional, a distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é definida por $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
Essa é a distância que você está acostumado a usar: ela mede a distância *em linha reta* entre os dois pontos e é chamada de *distância euclidiana*. Há, entretanto, outras formas de medir distâncias entre dois pontos, que são mais úteis em determinadas situações. Uma das mais conhecidas é a chamada *distância de Manhattan* (ou *distância do taxista*), que é definida por $D(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

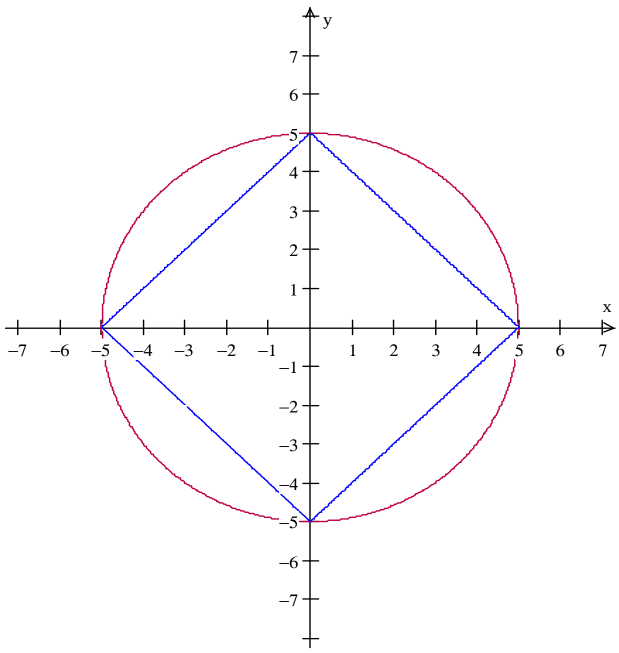
Seja *O* a origem do sistema cartesiano.

A Esboce, em um mesmo sistema, os gráficos dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem, separadamente, as equações $d(P,O) = 5$ e $D(P,O) = 5$.

B Quais são os pontos de interseção dos dois gráficos?

Uma solução:

a) $d(P,O) = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$, que é a equação de uma circunferência de centro na origem e raio 5, como esperado.
$D(P,O) = 5 \Rightarrow |x| + |y| = 5$
Nesse caso, têm-se quatro hipóteses:
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x + y = 5 \\ x < 0, y \geq 0 \Rightarrow -x + y = 5 \\ x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 5 \\ x \geq 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 5 \end{cases}$$
, e o gráfico é a união de quatro segmentos de reta, conforme se vê a seguir:



b) Os pontos de interseção entre os dois gráficos são: $(5,0), (0,5), (-5,0), (0,-5)$.

5 Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Determine os números reais λ e as matrizes-coluna não nulas correspondentes $v=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tais que $Av=\lambda v$.

Uma solução:

Deve-se ter:

$$Av=\lambda v \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x \\ 2z \\ 2y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x=\lambda x \\ 2z=\lambda y \\ 2y=\lambda z \end{cases}$$

Da primeira equação tem-se: x=0 ou $\lambda=2$.

i) Se $\lambda=2$, x é qualquer e das segunda e terceira equações tem-se que y = z, ou seja a matriz-coluna v é qualquer matriz do tipo $v=\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}$ desde que não se tenha $x = y = 0$.

ii) Se x = 0, da segunda equação tem-se $z=\frac{\lambda y}{2}$ que substituído na terceira equação fornece $2y=\frac{\lambda^2 y}{2}$ e daí y = 0 ou $\lambda^2=4$.

Entretanto, se y = 0 então pela segunda equação tem-se z = 0 e, portanto, v seria a matriz-coluna nula (não serve).
Se $\lambda^2=4$, então $\lambda=2$ ou $\lambda=-2$.

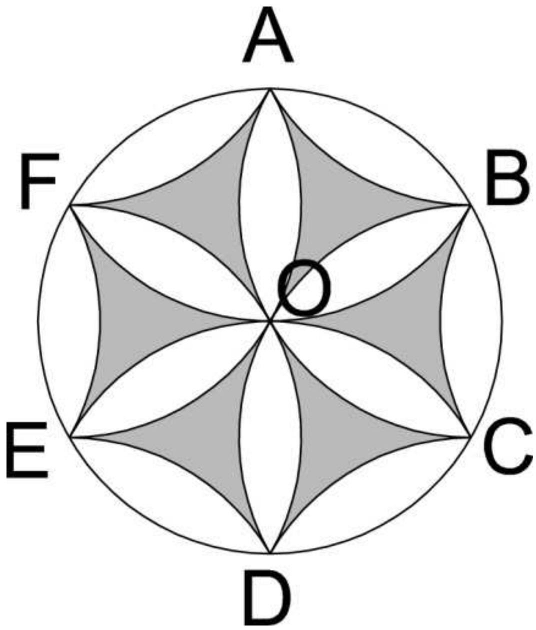
Para $\lambda=2$, tem-se $y = z$ e recaímos no resultado do item i).

Para $\lambda=-2$, tem-se y = -z e $v=\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}$ desde que $y \neq 0$.

Resumindo: $\lambda=2$ e $v=\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}$, desde que não se tenha $x = y = 0$

$\lambda=-2$ e $v=\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}$, desde que $y \neq 0$.

6 A figura a seguir foi construída a partir de uma circunferência de raio *R* e centro O; os pontos A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular e todos os arcos na figura são arcos de circunferência de raio *R*.



Calcule a área da região sombreada da figura.

Uma solução:

A área pedida é a área do círculo de raio *R* menos doze vezes a área de uma pétala.
A área de uma pétala é duas vezes a diferença entre a área de um setor circular de 60^0 e raio *R* (por exemplo, o setor circular AOB) e o triângulo equilátero correspondente, AOB. Assim, a área de uma pétala é $2\left(\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)=R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

A área pedida é, então: $\pi R^2-12R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3R^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$.

7 Classifique-se um dia apenas pelo fato de ele ter tido céu nublado ou céu limpo, segundo algum critério pré-estabelecido, isto é, considere que se sabe sempre dizer se um determinado dia teve céu nublado ou teve céu limpo, sempre uma única dessas duas classificações.
Dessa forma, a cada semana concluída, de domingo a sábado, podemos enunciar qual foi a sequência de dias nublados e de dias limpos daquela semana, começando pelo domingo e terminando no sábado, como, por exemplo:

domingo	segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sábado
nublado	limpo	limpo	limpo	nublado	limpo	nublado

Duas semanas serão ditas *iguais* quando, e somente quando, tiverem exatamente a mesma sequência de dias nublados e de dias limpos de domingo a sábado.

Mostre que em um período de três anos há, obrigatoriamente, pelo menos duas semanas *iguais*.

Uma solução:

A quantidade de distribuições diferentes de dias nublados ou limpos que podemos atribuir a uma semana é $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$ já que são sete dias e cada um deles pode ser classificado de duas maneiras: nublado ou limpo.

Entretanto, em três anos temos pelo menos $3\times365=1095$ dias que divididos por 7 nos dá 156 semanas completas e mais 3 dias. Como são 156 semanas completas e somente 128 maneiras diferentes de classificá-las, obrigatoriamente pelo menos duas terão exatamente a mesma distribuição e serão *iguais*.

8 Em um triângulo de ângulos internos A, B e C, tem-se que $B = 2A$. Sabendo que $cos(B) = -\frac{1}{4}$, calcule $sen(A)$ e $cos(A)$.

Uma solução:

Como $cos(B) = -\frac{1}{4}$, então B é obtuso e, portanto, A e C são agudos já que um triângulo não pode ter mais de um ângulo obtuso. Portanto, $sen(A)$ e $cos(A)$ são positivos.

Como $B = 2A$, tem-se: $cos(B) = cos(2A) = cos^2(A) - sen^2(A) = 2cos^2(A) - 1 = -\frac{1}{4}$.

Daí, $cos^2(A) = \frac{3}{8}$ e, portanto, $cos(A) = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Daí, $sen^2(A) = 1 - \frac{6}{16} = \frac{10}{16} \Rightarrow sen(A) = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

9 A sequência $log_7 98, log_7 a, log_7 b, log_7 c, log_7 1800$ forma uma progressão aritmética.

Calcule o produto *abc*.

Uma solução:

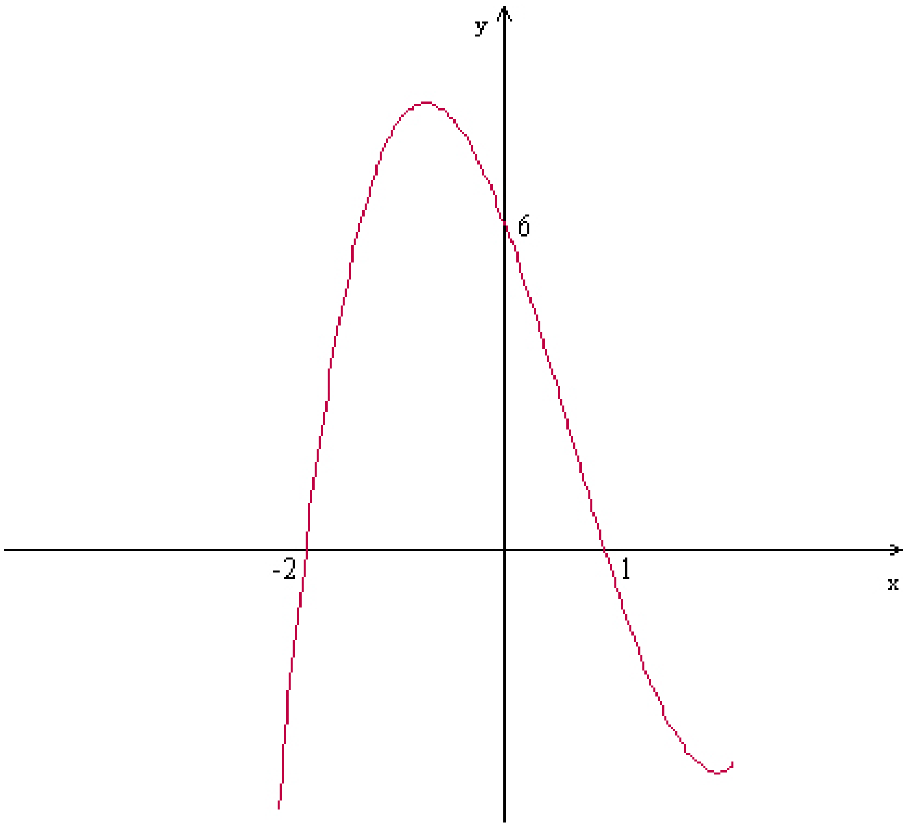
Como a sequência original é uma progressão aritmética, tem-se:
$log_7 a - log_7 98 = log_7 b - log_7 a = log_7 c - log_7 b = log_7 1800 - log_7 c$.

Daí: $log_7 \frac{a}{98} = log_7 \frac{b}{a} = log_7 \frac{c}{b} = log_7 \frac{1800}{c} \Rightarrow \frac{a}{98} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{1800}{c}$

De $\frac{a}{98} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{1800}{c}$ tem-se $b^2 = ac$ e $ac = 98 \times 1800 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$.

Assim, $b = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow abc = b^3 = 2^6 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^3 = 74.088.000$

10 A figura a seguir mostra parte do gráfico do polinômio de coeficientes reais $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde se veem dois de seus zeros: • 2 e 1.



Determine os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c*, e do terceiro zero de *P*(*x*).

Uma solução:

A inspeção do gráfico nos mostra que $P(0) = 6$ e, portanto, tem-se $c = 6$.
Por outro lado, o polinômio pode ser escrito como $P(x) = (x+2)(x-1)(x-r)$, onde *r* é o terceiro zero de *P*(*x*).

Portanto, $x^3 + ax^2 + bx + 6 \equiv (x+2)(x-1)(x-r) \Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + 6 \equiv x^3 + (1-r)x^2 + (-2-r)x + 2r$. Da identidade dos polinômios tem-se:

$$\begin{cases} a = 1 - r \\ b = -2 - r \\ 6 = 2r \end{cases}$$

e daí: $r = 3$, $a = -2$ e $b = -5$.

Logo, $a = -2$, $b = -5$, $c = 6$ e o terceiro zero de *P*(*x*) é 3.