Matemática Aplicada

1 Considere, no espaço cartesiano bidimensional, os movimentos unitários *N*, *S*, *L* e *O* definidos a seguir, onde $(a,b) \in R^2$ é um ponto qualquer:

$N(a,b) = (a,b+1)$
$S(a,b) = (a,b-1)$
$L(a,b) = (a+1,b)$
$O(a,b) = (a-1,b)$

Considere ainda que a notação $XY(a,b)$ significa $X(Y(a,b))$, isto é, representa a combinação em sequência dos movimentos unitários *X* e *Y*, onde o movimento *Y* é executado primeiro e, a seguir, o movimento *X*.

A Mostre que a combinação dos movimentos *N* e *S*, em qualquer ordem, é nula, isto é, $NS(a,b) = SN(a,b) = (a,b)$.

B Partindo do ponto $(1,4)$, quantos caminhos mínimos (isto é, com a menor quantidade possível de movimentos) diferentes podem ser percorridos, utilizando apenas os movimentos unitários definidos, para se chegar ao ponto $(-1,7)$?

Resolução

A $NS(a,b) = N(S(a,b)) = N(a,b-1) = (a,b-1+1) = (a,b)$
$SN(a,b) = S(N(a,b)) = S(a,b+1) = (a,b+1-1) = (a,b)$

B *Para ir do ponto $(1,4)$ ao ponto $(-1,7)$, a quantidade mínima de movimentos acontece com dois movimento O e três movimento N, sendo que esses cinco movimentos podem ser executados em qualquer ordem. Assim, a quantidade de caminhos mínimos diferentes é igual à quantidade de permutações das letras OONNN, isto é,* $\frac{5!}{2!3!} = 5 \times 2 = 10$ *caminhos diferentes.*

2 Em uma competição de Matemática, a prova é do tipo múltipla-escolha com 25 questões. A pontuação de cada competidor é feita de tal maneira que cada questão

- respondida corretamente vale 6 pontos;
- não respondida vale 1,5 ponto;
- respondida erradamente vale 0 (zero) ponto.

A É possível um competidor fazer exatamente 100 pontos? Se a resposta for afirmativa, mostre uma maneira; se não for, justifique a impossibilidade.

B Márcia fez mais de 100 pontos. Quantas questões, no mínimo, ela respondeu corretamente?

Resolução

A *Sejam, respectivamente, C, N e E, as quantidades de questões respondidas corretamente, não respondidas e respondidas erradamente por um competidor. Assim, deve-se ter:*

$$\begin{cases} C+N+E=25 \\ 6C+1{,}5N=100 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2 e dividindo por 3, obtém-se: $N+4C=\dfrac{200}{3}$.

Ora, como N e C são inteiros, N+4C também é inteiro e, portanto, a igualdade é impossível. Logo, não é possível um competidor fazer exatamente 100 pontos.

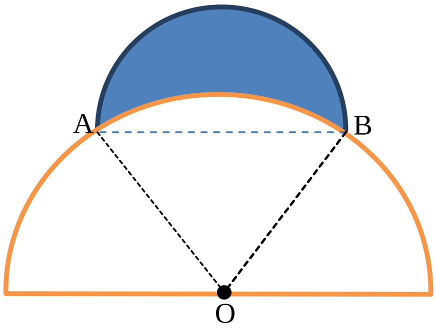
B *A situação mais favorável ocorre quando Márcia não responde nenhuma questão erradamente, isto é,* $E=0$.

Nesse caso, tem-se $\begin{cases} C+N=25 \\ 6C+1{,}5N>100 \end{cases}$. *Da primeira equação tem-se* $N = 25 - C$, *que substituído na segunda equação fornece:*

$$6C+1{,}5(25-C)>100 \Rightarrow 4{,}5C>100-37{,}5 \Rightarrow C>\frac{125}{9}=13{,}888...$$

Logo, o valor mínimo possível para C é 14, isto é , Márcia respondeu corretamente, no mínimo 14 questões.

3 A figura mostra um semicírculo cujo diâmetro *AB*, de medida *R*, é uma corda de outro semicírculo de diâmetro 2*R* e centro *O*.



A Calcule o perímetro da parte sombreada.

B Calcule a área da parte sombreada.

Resolução

Como os diâmetros dos R e 2R, o triângulo AOB é equilátero com lado medindo R. Portanto, o ângulo AOB mede 60º. Daí tem-se:

A *O arco AB do círculo maior mede* $\frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi R}{3}$ *e o comprimento da semicircunferência menor (raio* $\frac{R}{2}$*) mede* $\frac{\pi R}{2}$*. Logo, o perímetro da parte sombreada é* $\frac{\pi R}{3} + \frac{\pi R}{2} = \frac{5\pi R}{6}$.

B *A área sombreada é a área do semicírculo menor menos a área do segmento circular definido pelo arco AB do semicírculo maior. A área do semicírculo menor é* $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{8}$ *e a área do segmento circular é* $\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Assim, a área da parte sombreada é:

$$\frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{24} = \frac{R^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

4 Um sorvete de casquinha consiste de uma esfera (sorvete congelado) de raio 3 cm e um cone circular reto (casquinha), também com 3 cm de raio. Se o sorvete derreter, ele encherá a casquinha completa e exatamente. Suponha que o sorvete derretido ocupe 80% do volume que ele ocupa quando está congelado.
Calcule a altura da casquinha.

Resolução

O volume do sorvete derretido é igual ao volume da casquinha. Seja H a altura da casquinha. Tem-se:

$$\frac{80}{100} \times \frac{4\pi 3^3}{3} = \frac{\pi 3^2 H}{3} \Rightarrow H = \frac{48}{5} = 9{,}6 \text{ cm}.$$

5 Seja *f* uma função que, a cada número complexo *z*, associa $f(z) = iz$, onde *i* é a unidade imaginária. Determine os complexos *z* de módulo igual a 4 e tais que $f(z) = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de *z*.

Resolução

Seja $z = a + bi$*, onde a e b são reais. Deve-se ter:* $\begin{cases} |z| = 4 \\ iz = \bar{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \\ i(a + bi) = a - bi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ -b + ai = a - bi \end{cases}$

Da segunda igualdade tem-se que $a = -b$. *Substituindo na primeira equação obtém-se:* $(-b)^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$.

Logo, como $a = -b$, *os complexos z que satisfazem ao enunciado são* $z = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ *e* $z = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

6

A Lançam-se ao ar 3 dados equilibrados, ou seja, as probabilidades de ocorrer cada uma das seis faces são iguais. Qual é a probabilidade de que apareça soma 9? Justifique a resposta.

B Um dado é construído de tal modo que a probabilidade de observar cada face é proporcional ao número que ela mostra. Se lançarmos o dado, qual é a probabilidade de obter um número primo?

Resolução

A *A soma 9 aparece assim:*

$1 + 2 + 6 \rightarrow 3! = 6$

$1 + 3 + 5 \rightarrow 3! = 6$

$1 + 4 + 4 \rightarrow \dfrac{3!}{2!} = 3$

$2 + 2 + 5 \rightarrow \dfrac{3!}{2!} = 3$

$2 + 3 + 4 \rightarrow 3! = 6$

$3 + 3 + 3 \rightarrow 1$

A probabilidade de sair soma 9 é igual a $\dfrac{6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1}{6.6.6} = \dfrac{25}{216}$.

B *A probabilidade de sair um número primo é* $\dfrac{2k + 3k + 5k}{k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k} = \dfrac{10}{21}$.

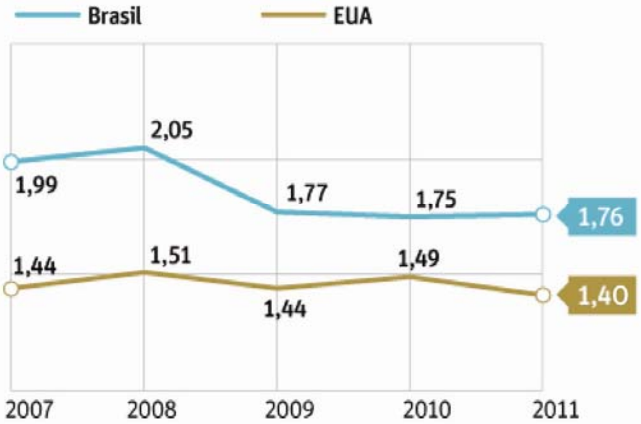
7 Observe a notícia abaixo e utilize as informações que julgar necessárias.

VAREJO MIRA PREVENÇÃO DE PERDAS

Com retomada de inflação, setor ganha importância para manter lucro

Índice de perdas no varejo

Em %, sobre o faturamento líquido do setor



R$ 18,5 mihões

é a perda em valores do varejo brasileiro em 2011

Perdas por segmento	Em %
Supermercado	1,96
Farmácias e drogarias	0,38
Outros*	0,19
Média do varejo	1,76

Causas das perdas	
Furto externo	19
Furto interno	16
Erros administrativos	16
Fornecedores	10
Quebra operacional**	32
Outros ajustes	10

Quem participou da pesquisa	
Empresas	275
Lojas	4.486
Centros de distribuição	413

(*) O grupo "outros" inclui varejo da construção civil e lojas de conveniência e roupa, mas não na totalidade desses segmentos
(**) Quebra operacional inclui produtos danificados por clientes, por funcionários, com validade vencida, e embalagens vazias com conteúdo furtado Fonte: Provar (Programa do Varejo) da USP

A Suponha que a partir de 2010 os índices de perdas no varejo, no Brasil e nos EUA, possam ser expressos por funções polinomiais do 1º grau, $y = ax + b$, em que x = 0 representa o ano 2010, x = 1 o ano 2011, e assim por diante, e y representa o índice de perdas expresso em porcentagem. Determine as duas funções.

B Em que ano a diferença entre o índice de perdas no varejo, no Brasil, e o índice de perdas no varejo, nos EUA, será de 1%, aproximadamente? Dê como solução os dois anos que mais se aproximam da resposta.

Resolução

A *Brasil: (0; 1,75) (1; 1,76)* $m = 0{,}01$ $y - 1{,}75 = 0{,}01\,(x - 0) \rightarrow y = 0{,}01x + 1{,}75$

USA: (0; 1,49) (1; 1,40) $m = -0{,}09$ $y - 1{,}49 = -0{,}09\,(x - 0) \rightarrow y = -0{,}09x + 1{,}49$

B $0{,}01x + 1{,}75 - (-0{,}09x + 1{,}49) = 1 \rightarrow 0{,}1x = 0{,}74 \rightarrow x = 7{,}4$ *anos*

Os anos mais próximos são 2017 e 2018.

8 Conta a lenda:

Havia um rei que tinha costume de dar liberdade a um prisioneiro no dia do seu aniversário. Em certa ocasião levou três condenados a um quarto escuro, no qual havia três chapéus brancos e dois chapéus negros. Contou aos prisioneiros quantos chapéus havia e a cor de cada um. Colocou um chapéu em cada prisioneiro, depois os tirou do quarto e levou-os a um lugar onde cada um pudesse ver o chapéu dos outros dois, mas não o seu.
Perguntou ao prisioneiro A a cor do seu chapéu e ele não soube responder.
O mesmo aconteceu com o prisioneiro B.
Finalmente, fez a mesma pergunta ao prisioneiro C, que era totalmente cego e havia escutado as respostas dos outros dois.
"Não necessito enxergar para saber que meu chapéu é branco."
Foi colocado em liberdade assim que todos observaram que havia acertado a resposta.

A Faça uma tabela em que apareçam todas as possibilidades das cores dos chapéus colocados nos prisioneiros.

B Explique por que o condenado C somente podia estar com o chapéu branco.

Resolução

A

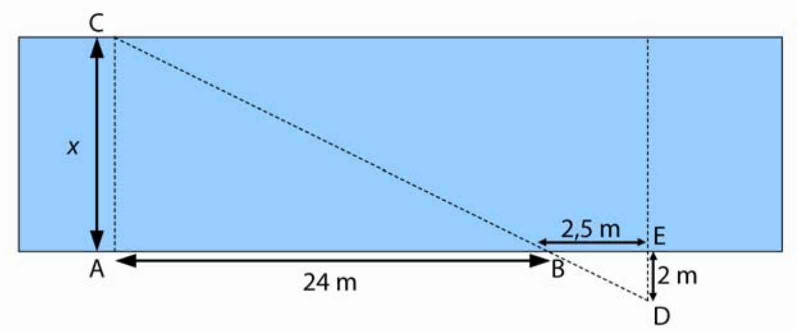
Prisioneiro A	*b*	*b*	*b*	*n*	*n*	*n*	*b*
Prisioneiro B	*b*	*b*	*n*	*b*	*n*	*b*	*n*
Prisioneiro C	*b*	*n*	*b*	*b*	*b*	*n*	*n*
	1	***2***	*3*	*4*	*5*	***6***	***7***

B *A possibilidade 2 é incorreta: se o prisioneiro B estivesse de chapéu negro, o prisioneiro acertaria a resposta. Assim o prisioneiro B saberia que seu chapéu só podia ser branco. E ele seria libertado.*
A possibilidade 6 é incorreta: vendo que a cor dos chapéus dos outros dois condenados era negro, ele saberia que o seu era branco. E seria solto.
A possibilidade 7 é incorreta: enxergando que a cor dos chapéus dos outros dois condenados era negra, ele saberia que a cor do seu chapéu era branca. E seria solto.

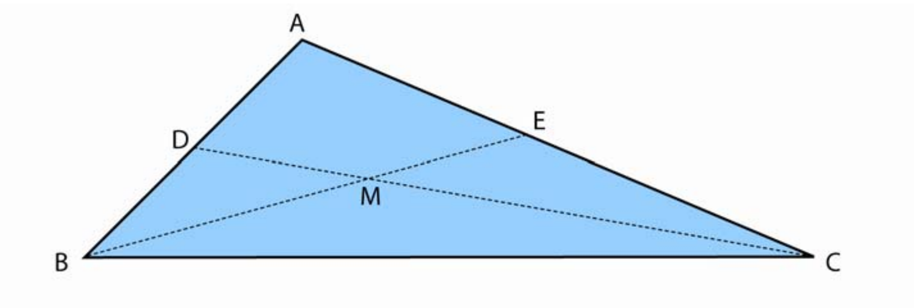
Todas as outras possibilidades mostram que a cor do chapéu do condenado C somente pode ser branca.

9

A Para medir a largura x de um rio sem necessidade de cruzá-lo, foram feitas várias medições como mostra a figura abaixo. Calcule a largura x do rio.



B Demonstre que a distância do vértice B ao baricentro M de um triângulo é o dobro da distância do ponto E ao baricentro M.



Resolução

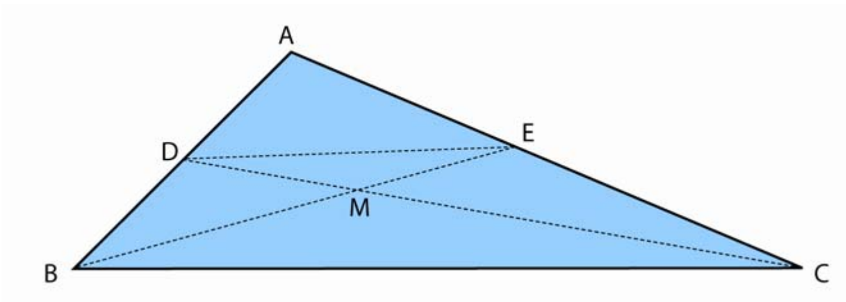
A *Os dois triângulos CAB e DEB são semelhantes:* $\frac{x}{24}=\frac{2}{2,5} \rightarrow x=19,2m$

A largura do rio é de 19,2 m.

B *Traçamos pelo ponto E a paralela ao lado BC.*

Os triângulos MED e MBC são semelhantes pois têm os ângulos respectivamente congruentes e a razão de semelhança é: $\frac{BC}{ED}=2$

Portanto: $\frac{BM}{ME}=2 \rightarrow BM=2.ME$



10

A Um sábio da Antiguidade propôs o seguinte problema aos seus discípulos:
"Uma rã parte da borda de uma lagoa circular de 7,5 metros de raio e se movimenta saltando em linha reta até o centro. Em cada salto, avança a metade do que avançou no salto anterior. No primeiro salto avança 4 metros. Em quantos saltos chega ao centro?

B O mesmo sábio faz a seguinte afirmação em relação à situação do item A:
"Se o primeiro salto da rã é de 3 metros, ela não chega ao centro."
Justifique a afirmação.

Resolução

A *O problema expressa a progressão geométrica: (4, 2, 1, ½, ...)*

Portanto: $7{,}5 = \dfrac{4\left[(\frac{1}{2})^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \rightarrow \dfrac{-7{,}5}{8} = (\frac{1}{2})^n - 1 \rightarrow (\frac{1}{2})^n = \dfrac{1}{16} \rightarrow n = 4$

Chega ao centro em 4 saltos.

B $S = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{3}{1 - 0{,}5} = 6$

Se continuar saltando desse modo vai chegar a uma distância de 6 metros da borda e não chega ao centro.

Fim da Prova de Matemática Aplicada