INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISA ESPACIAL – INPE

DINÂMICA DE VOO (PQ01)

SUA PROVA

- Além deste caderno contendo **5 (cinco)** questões discursivas **com as respectivas folhas de rascunho**, você receberá do fiscal de prova as folhas de textos definitivos;

TEMPO

- Você dispõe de **4 (quatro) horas** para a realização da prova;
- **2 (duas) horas** após o início da prova, é possível retirar-se da sala, sem levar o caderno de questões;
- A partir dos **30 (trinta) minutos** anteriores ao término da prova é possível retirar-se da sala **levando o caderno de questões**.

NÃO SERÁ PERMITIDO

- Qualquer tipo de comunicação entre os candidatos durante a aplicação da prova;
- Anotar informações relativas às respostas em qualquer outro meio que não seja no caderno de questões e nas folhas de textos definitivos;
- Levantar da cadeira sem autorização do fiscal de sala;
- Usar o sanitário ao término da prova, após deixar a sala.

INFORMAÇÕES GERAIS

- Verifique se seu caderno de questões está completo, sem repetição de questões ou falhas. Caso contrário, **notifique imediatamente o fiscal da sala**, para que sejam tomadas as devidas providências;
- Confira seus dados pessoais, especialmente nome, número de inscrição e documento de identidade e leia atentamente as instruções para preencher as folhas de textos definitivos;
- Para o preenchimento das folhas de textos definitivos, use somente caneta esferográfica, fabricada em material transparente, com tinta preta ou azul;
- Assine seu nome apenas no(s) espaço(s) reservado(s) no cartão de respostas;
- Caso você tenha recebido caderno de cargo **diferente** do impresso em suas folhas de textos definitivos, o fiscal deve ser **obrigatoriamente** informado para o devido registro na ata da sala;
- O preenchimento das folhas de textos definitivos é de sua responsabilidade e **não será permitida a troca de folha de texto definitivo em caso de erro cometido pelo candidato**;
- Para fins de avaliação, serão levadas em consideração apenas os textos das folhas de textos definitivos;
- A FGV coletará as impressões digitais dos candidatos na lista de presença;
- Os candidatos serão submetidos ao sistema de detecção de metais quando do ingresso e da saída de sanitários durante a realização das provas.
- **Boa prova!**

FGV CONHECIMENTO

QUESTÃO 1

As leis do movimento planetário foram estabelecidas no início do século XVII pelo astrônomo, matemático e físico alemão Johannes Kepler, as quais ficaram conhecidas como Leis de Kepler. Em 1687, Isaac Newton publica os volumes da obra *Principia Mathematica*, na qual são enunciadas três leis do movimento, conhecidas como Leis de Newton, e a Lei da Gravitação Universal. A importância de tais trabalhos perdura até os dias atuais. Por exemplo, o movimento de um satélite artificial em torno da Terra pode ser descrito e modelado matematicamente a partir destes postulados.

Diante do exposto, responda aos itens a seguir.

A) Enuncie as Leis de Kepler e destaque suas implicações na interpretação do movimento orbital.

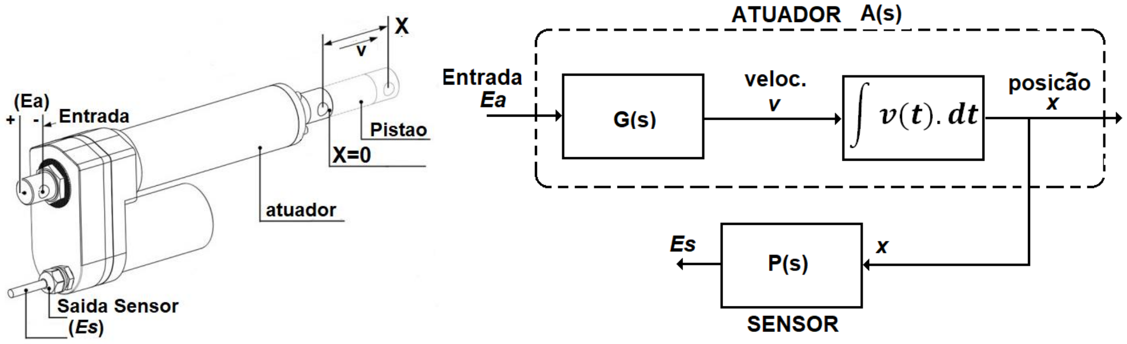
B) Aplicando as Leis de Newton e a Lei da Gravitação Universal, represente graficamente e modele matematicamente o problema de um satélite (M_2) que orbita a Terra (M_1), obtendo a equação do movimento para este problema. Leve em conta que nesta aproximação $M_1 \gg M_2$.

C) A partir do resultado obtido em (B), obtenha o vetor momento angular. Interprete geometricamente este vetor e discuta a importância deste resultado para a modelagem do Problema Gravitacional de Dois Corpos.

QUESTÃO 2

Sensores e *atuadores* são elementos básicos em sistemas aeroespaciais. Sua caracterização, em termos de resposta dinâmica, tem que ser obtida para se avaliar o comportamento dinâmico de sistemas ainda mais complexos, que usam sensores e atuadores como componentes. A simulação de sistemas mais complexos também precisa desta caracterização.

A figura a seguir mostra o atuador e um diagrama de blocos do mesmo, que recebe como entrada um sinal de tensão elétrica ***Ea***, em Volts, tendo como função colocar um pistão numa posição ***x***, em cm, relacionada a esta tensão aplicada.



A posição ***x*** = 0 corresponde ao pistão totalmente recolhido. Para isso, o design do atuador é tal que ao aplicarmos a tensão ***Ea***(t), o pistão rapidamente atinge uma velocidade ***v*** proporcional ao modulo da tensão aplicada, movendo o pistão para a posição desejada. Quanto maior ***Ea***, mais rápido o pistão se move. Para ***Ea*** > 0, o pistão avança, e se ***Ea*** < 0, o movimento é de recolher o pistão. Para ***Ea*** = 0, não há movimento (***v*** =0) e o pistão mantém a sua posição. Sabe-se de antemão que, do ponto de vista dinâmico, a relação entre velocidade ***v*** do pistão e a entrada ***Ea***(t) tem uma função de transferência G(s)=V(s)/Ea(s) como sendo de primeira ordem, ou seja, G(s) é do tipo G(s) = $\frac{C}{s+D}$, onde C e D são constantes. Aqui ***s*** é a variável no domínio da transformada de Laplace dos sinais. V(s), por exemplo, é a transformada de Laplace da velocidade ***v***(t), e assim por diante.

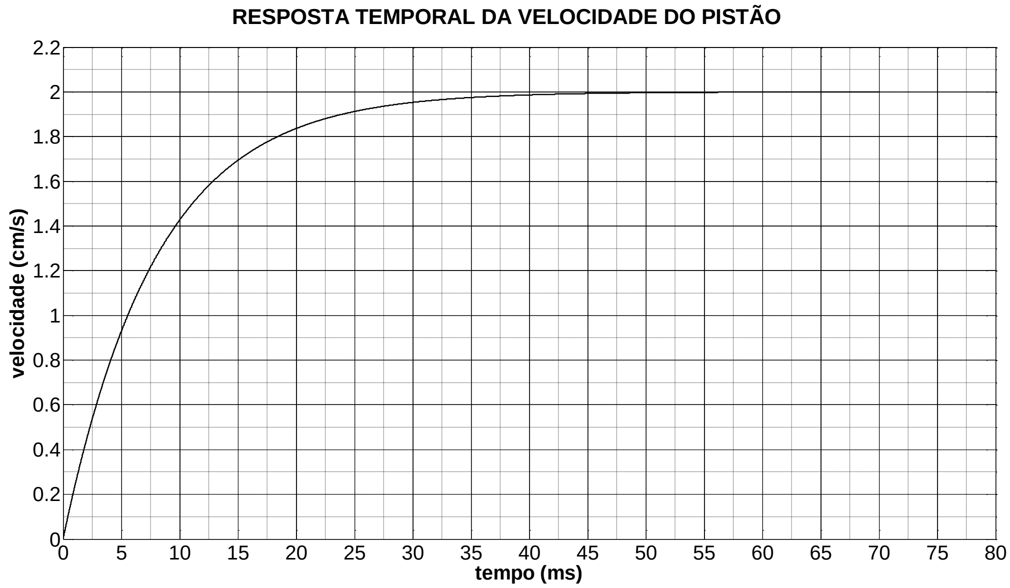
Para poder usar este atuador em configurações de controle de malha fechada, mais utilizadas na pratica, o atuador ainda vem equipado com um sensor de posição linear, que dá uma saída de tensão elétrica ***Es***(t) (>0) proporcional a posição ***x*** do sensor. Temos ***Es*** = 0 quando x = 0.

Baseado no exposto acima, responda os itens a seguir.

Para caracterizar a dinâmica desse atuador, precisamos ver como o pistão acelera. Para isso, monitoramos a velocidade deste quando se aplica uma entrada degrau unitário u(t) como tensão elétrica ***Ea***(t). Uma entrada degrau unitário ***u***(t) de tensão está definida como

$$u(t) = \begin{cases} 0\ Volt, & t < 0 \\ 1\ Volt, & t \geq 0 \end{cases}$$

Foi obtido, então, o gráfico no tempo da velocidade ***v***(t), em centímetros por segundo, conforme mostrado a seguir (escala de tempo é em milissegundos):



A) A partir destes dados, ache a função de transferência G(s)=V(s)/Ea(s) e dar, também, a função global de transferência do atuador A(s)=X(s)/Ea(s).

Já para o sensor, a analise física de seu funcionamento produziu o seguinte modelo, descrito por uma equação diferencial linear invariante no tempo, envolvendo a entrada ***x***(t), em cm, e a saída ***Es***(t), em Volts:

$$0.01 * \frac{d^2E_s(t)}{dt^2} + 0.3 * \frac{dE_s(t)}{dt} + (1+n) * E_s(t) = 0.04 * \frac{dx(t)}{dt} + 1.6 * x(t)$$

A função de transferência de um sistema representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo é definida como a razão entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, admitindo-se todas as condições iniciais nulas.

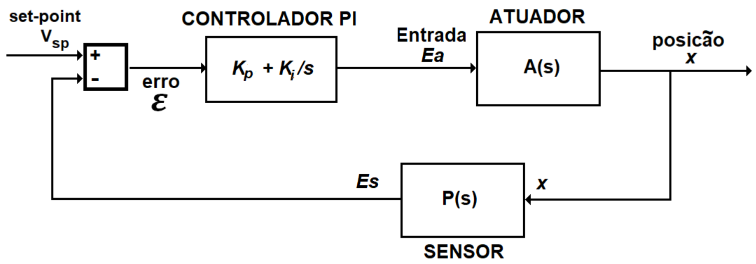
Aqui, assuma que ***n*** é um parâmetro que tem um valor real fixo, durante a operação do sensor, e cujo valor pode ser eventualmente ajustado no sensor.

B) Ache a função de transferência do sensor P(s)=Es(s)/X(s) que representaria este sistema.

Como o sensor é um sistema de segunda ordem, ele pode apresentar um comportamento amortecido ou oscilatório amortecido, quando submetido a uma entrada degrau ***u***(t), dependendo de como é P(s).

C) Ache, então, a faixa de valores de *n* para os quais o sistema seja estável e tenha garantidamente um comportamento amortecido <u>sem oscilações</u>.

Finalmente, usaremos o conjunto atuador/sensor para montar um sistema de controle preciso de posição, utilizando um controlador PI (Proporcional-integral) em malha fechada, com ganhos ***Kp*** (proporcional) e ***Ki*** (integral) conforme o diagrama de blocos abaixo:



Vamos supor que tenhamos ajustado ***Kp*** = 1.5 e ***Ki*** = 0.1, e n = 1 para o parâmetro ajustável do sensor. Para esses ajustes, assuma que o sistema é estável, e sempre que ajustamos uma tensão elétrica de set-point ***Vsp***, em Volts, o pistão tende, após certo tempo, para a posição correspondente a esse valor de ***Vsp*** ajustado. Cada valor de set-point corresponderá a um ajuste de posição.

D) Qual valor de set-point *Vsp*, em Volts, que fará o pistão se posicionar em x=5 cm da sua posição inicial?

Obs.: *De maneira a apoiar a resolução, acrescentamos abaixo um resumo de propriedades e de transformadas de Laplace de diversos sinais. Lembrando que para a transformada de Laplace, são considerados os sinais f(t) definidos somente para t>=0.*

$f(t)$ (t >=0)	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$
$f+g$	$F+G$
αf $(\alpha \in \mathbf{R})$	αF
$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^k f}{dt^k}$	$s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}\frac{df}{dt}(0) - \cdots - \frac{d^{k-1}f}{dt^{k-1}}(0)$
$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$G(s) = \frac{F(s)}{s}$
$\mathcal{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
f(t) = constante A (para t>=0)	1/s

Numero de Euler $e \approx 2.718$ e seu inverso $e^{-1} \approx 0.368$

Obs.: *notação utilizada: $\mathcal{L}$ denota a operação de tirar a transformada de Laplace de um sinal, $\mathcal{L}^{-1}$ denota a transformada inversa de Laplace: $\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$, $\mathcal{L}(v(t)) = V(s)$, $\mathcal{L}(E_a(t)) = E_a(s)$, e $\mathcal{L}(E_s(t)) = E_s(s)$. E as funções A(s), G(s), P(s) são funções de transferência de sistemas.*

QUESTÃO 3

Considere um satélite artificial terrestre em órbita baixa (LEO), cujas equações de estado estão representadas em função dos quatérnios. Os quatérnios consistem em um número complexo com quatro componentes: uma parte escalar ou real, q_4, e uma parte vetorial ou imaginária, $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$, isto é,

$$\boldsymbol{q} = q_4 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \qquad (1)$$

em que $i, j\ e\ k$ são os números hiper imaginários satisfazendo as condições:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ jk = -kj &= i \\ ki = -ik &= j \end{aligned} \qquad (2)$$

A quantidade, q_4, e a parte vetorial, $\vec{q}$, que podem ser expressos em função do ângulo de rotação α e do eixo de rotação $\hat{\boldsymbol{e}} = (e_1 \quad e_2 \quad e_3)^T$, que é um vetor unitário na direção do vetor velocidade de rotação pelas Equações (3) e (4):

$$q_4 = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (3)$$

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}} \qquad (4)$$

Com base nas informações acima,

A) Calcule o produto $\boldsymbol{q}_n . \boldsymbol{q}_m$ dos quatérnios $\boldsymbol{q}_n = 2i - 3j + 2k \ + 5$ e $\boldsymbol{q}_m = 3i - 2j + k$.

B) Encontre a soma dos autovalores da matriz de rotação $A(\boldsymbol{q})$ expressada em termos de quatérnios que é dada por:

$$A(\boldsymbol{q}) = (q_4^2 - \vec{q}^{\boldsymbol{2}})\boldsymbol{1} + 2\vec{q}\vec{q}^{\boldsymbol{T}} - 2q_4 Q$$

em que, 1 é matriz identidade e Q é uma matriz antissimétrica dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

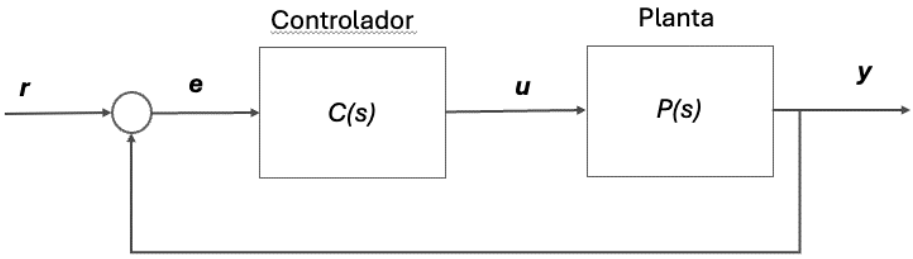
Isto é,

$$A(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}.$$

C) Cite três vantagens em utilizar quatérnios em relação aos ângulos de Euler, quando se deseja estudar a estabilidade do sistema de controle de atitude desse satélite.

QUESTÃO 4

Considere o sistema com realimentação abaixo ilustrado:



Considerando a utilização de um controlador PID em todos os itens abaixo:

A) Escreva a relação no domínio do tempo entre $u(t)$ e $e(t)$;

B) Qual é a função de transferência para $\frac{U(s)}{E(s)}$

C) Considerando, para este controlador, os termos $K_p =$ ganho proporcional; $K_{i=}$ ganho integral; $K_d =$ ganho derivativo; explique os efeitos gerais deles sobre o sistema de malha fechada ao qual está sendo aplicado, considerando os seguintes índices de desempenho associados à aplicação de um sinal de entrada tido "degrau unitário":
I) "tempo de subida";
II) "máximo sobressinal";
III) "tempo de acomodação";
IV) "erro de regime".

D) Considerando um sistema de controle de malha fechada, explique a relevância de testá-lo com um degrau unitário e o significado dos índices de desempenho que aparecem no item anterior e suas relações com a estabilidade de um sistema.

QUESTÃO 5

A notação matemática utilizada para representar de forma compacta a soma de vários termos similares é:

$$\sum_{i=m}^{n} x_i$$

em que, i é o índice do somatório; x_i é uma variável indexada que representa cada termo do somatório; m é o índice inicial (ou limite inferior); e n é o índice final (ou limite superior).

A) Considerando $x_i = \frac{i}{2}$, escreva um código em linguagem C ou Python que defina os parâmetros de limite inferior *m* e de limite superior *n*.

B) Calcule o resultado do somatório por meio de uma função iterativa.

C) Faça a chamada da função (ou aplicação) pelo seu nome e imprima na tela o resultado do somatório.

Realização

FGV CONHECIMENTO