**1ª QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja $P$ uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo $n$ um número natural, calcule o determinante da matriz $A^n$.

**2ª QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Considere uma seqüência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por

$$a_{K+1} = \frac{2}{3} a_K$$

$$b_{K+1} = \frac{4}{5} b_K$$

onde $a_K$ e $b_K$, para $K \geq 1$, são os comprimentos dos catetos do $K$-ésimo triângulo retângulo. Se $a_1 = 30$ cm e $b_1 = 42$ cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando $K \to \infty$.

**3ª QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Considere o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são números reais positivos. Determine o valor de $P = \alpha\beta$.

**4ª QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Sejam $C$ e $C^*$ dois círculos tangentes exteriores de raios $r$ e $r^*$ e centros $O$ e $O^*$, respectivamente, e seja $t$ uma reta tangente comum a $C$ e $C^*$ nos pontos não coincidentes $A$ e $A^*$. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento $AA^*$ em torno do eixo $OO^*$, e seja $S$ a sua correspondente área lateral. Determine $S$ em função de $r$ e $r^*$.

**5ª QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Resolva a equação

$$\log_{(\operatorname{sen} x + \cos x)} (1 + \operatorname{sen} 2x) = 2, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

**6ª QUESTÃO** **Valor: 1,0**

O quadrilátero $BRAS$, de coordenadas $A(1,0)$, $B(-2,0)$, $R(x_1,y_1)$ e $S(x_2,y_2)$ é construído tal que $R\hat{A}S = R\hat{B}S = 90°$. Sabendo que o ponto $R$ pertence à reta $t$ de equação $y=x+1$, determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto $S$ ao se deslocar $R$ sobre $t$.

**7ª QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes da equação $x^2+(m-15)x+m=0$. Sabendo que $x_1$ e $x_2$ são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para $m$.

**$8^a$ QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Considere o conjunto formado por *m* bolas pretas e *n* bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as *m+n* bolas.

Observação: uma seqüência é dita *simétrica* quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

**$9^a$ QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Sejam *a*, *b* e *c* números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

**$10^a$ QUESTÃO** **Valor: 1,0**

Seja $f : \aleph \to \Re$ uma função tal que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008 \frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde $\aleph$ e $\Re$ são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\frac{1}{f(2006)}$.