Vestibular Nacional Unicamp 2000

Provas da 2ª Fase

Matemática

MATEMÁTICA

ATENÇÃO: Escreva a resolução COMPLETA de cada questão no espaço reservado para a mesma. Não basta escrever apenas o resultado final: é necessário mostrar os cálculos ou o raciocínio utilizado.

1. Um determinado ano da última década do século XX é representado, na base 10, pelo número *abba* e um outro, da primeira década do século XXI, é representado, também na base 10, pelo número *cddc*.

a) Escreva esses dois números.
b) A que século pertencerá o ano representado pela soma *abba+cddc* ?

2. A soma de dois números positivos é igual ao triplo da diferença entre esses mesmos dois números. Essa diferença, por sua vez, é igual ao dobro do quociente do maior pelo menor.

a) Encontre esses dois números.
b) Escreva uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ cujas raízes são aqueles dois números.

3.
a) Quantos são os triângulos não congruentes cujas medidas dos lados são **números inteiros** e cujos perímetros medem 11 metros ?
b) Quantos dos triângulos considerados no item anterior são eqüiláteros ? E quantos são isósceles ?

4. Em um certo jogo são usadas fichas de cores e valores diferentes. Duas fichas brancas equivalem a três fichas amarelas, uma ficha amarela equivale a cinco fichas vermelhas, três fichas vermelhas equivalem a oito fichas pretas e uma ficha preta vale quinze pontos.

a) Quantos pontos vale cada ficha ?
b) Encontre todas as maneiras possíveis para totalizar 560 pontos, usando, em cada soma, no máximo cinco fichas de cada cor.

5. As diagonais D e d de um quadrilátero convexo, não necessariamente regular, formam um ângulo agudo α .

a) Mostre que a área desse quadrilátero é $\frac{D\ d}{2}\,\text{sen}\,\alpha$.

b) Calcule a área de um quadrilátero convexo para o qual D = 8cm, d = 6cm e $\alpha = 30^\circ$.

6. Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: $F(t) = a\ 2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial (t = 0) seja igual a 1024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.
b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a 1/8 da população inicial?
c) Esboce o gráfico da função F(t) para t $[0,40]$.

7. Seja **A** a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação: **detA=0**.
b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$.

8. Sejam **A** e **B** os pontos de intersecção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

a) Quais as coordenadas dos pontos **A** e **B** ?
b) Se **P** é um ponto da circunferência diferente de **A** e de **B**, calcule as medidas possíveis para os ângulos $A\hat{P}B$.

9. Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares consecutivos cuja soma é 15.

a) Quais são esses números ?
b) Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.
c) Sendo α e β os outros dois ângulos do referido triângulo, com $\beta > \alpha$, mostre que $\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha < \frac{1}{4}$.

10. Para representar um número natural positivo na base 2, escreve-se esse número como soma de potências de 2. Por exemplo: $13 = 1\ 2^3 + 1\ 2^2 + 0\ 2^1 + 1\ 2^0 = 1101$.

a) Escreva o número $2^6 + 13$ na base 2.
b) Quantos números naturais positivos podem ser escritos na base 2 usando-se exatamente cinco algarismos?
c) Escolhendo-se ao acaso um número natural *n* tal que $1 \le n \le 2^{50}$, qual a probabilidade de que sejam usados exatamente quarenta e cinco algarismos para representar o número *n* na base 2?

11. Considere a equação: $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$.

a) Mostre que $x = i$ é raiz dessa equação.
b) Encontre as outras raízes da mesma equação.

12. Seja **P** um ponto do espaço **eqüidistante** dos vértices **A**, **B** e **C** de um triângulo cujos lados medem 8cm, 8cm e 9,6cm. Sendo d(**P**,**A**)=10cm, calcule:

a) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo **ABC**;
b) a altura do tetraedro, **não regular**, cujo vértice é o ponto **P** e cuja base é o triângulo **ABC**.