Vestibular Nacional Unicamp 2001

Provas da 2ª Fase

Matemática

MATEMÁTICA

ATENÇÃO: Escreva a resolução COMPLETA de cada questão no espaço reservado para a mesma. Não basta escrever apenas o resultado final: é necessário mostrar os cálculos ou o raciocínio utilizado.

1. Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

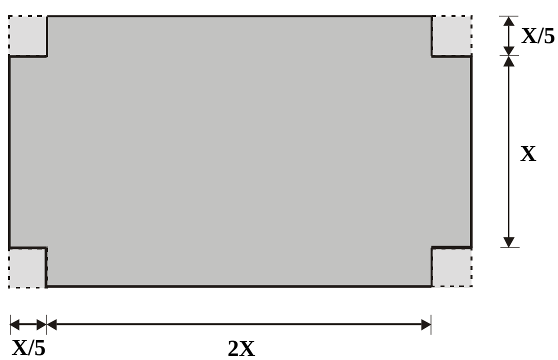
Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

2. Um fio de 48cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.

a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

3. A figura abaixo é a planificação de uma caixa sem tampa:



a) Encontre o valor de x, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.
b) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

4. O teorema fundamental da aritmética garante que todo número natural $n > 1$ pode ser escrito como um produto de números primos. Além disso, se $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_r^{t_r}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são números primos distintos, então o número de divisores positivos de n é $d(n) = (t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_r + 1)$.

a) Calcule $d(168)$, isto é, o número de divisores positivos de 168.
b) Encontre o menor número natural que tem exatamente 15 divisores positivos.

5. Considere três circunferências em um plano, todas com o mesmo raio r = 2cm e cada uma delas com centro em um vértice de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 6cm. Seja C a curva fechada de comprimento mínimo que tangencia externamente as três circunferências.

a) Calcule a área da parte do triângulo que está fora das três circunferências.
b) Calcule o comprimento da curva C.

6. Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R$ 20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima.
b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

7. O sistema de numeração na base 10 utiliza, normalmente, os dígitos de 0 a 9 para representar os números naturais, sendo que o zero não é aceito como o primeiro algarismo da esquerda. Pergunta-se:

a) Quantos são os números naturais de cinco algarismos formados por cinco dígitos diferentes?
b) Escolhendo-se ao acaso um desses números do item **a**, qual a probabilidade de que seus cinco algarismos estejam em ordem crescente?

8. Considere, no plano *xy*, as retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$.

a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo ABC formado por essas retas?
b) Qual é a área do triângulo ABC?

9. As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $\mathrm{A}(t) = \log_8 (1+t)^6$ e $\mathrm{B}(t) = \log_2 (4t + 4)$, onde a variável t representa o tempo em anos.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?
b) Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante t e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

10. Considere a equação trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta = 0$.

a) Mostre que **não** são soluções dessa equação os valores de θ para os quais $\cos\theta = 0$.
b) Encontre todos os valores de $\cos\theta$ que são soluções da equação.

11. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 26$.

a) Verifique se o número complexo $2 + 3i$ é raiz desse polinômio.
b) Prove que $p(x) > 0$ para todo número real $x > -2$.

12. A base de uma pirâmide é um triângulo eqüilátero de lado L = 6cm e arestas laterais das faces A = 4cm.

a) Calcule a altura da pirâmide.
b) Qual é o raio da esfera circunscrita à pirâmide?