

# VESTIBULAR

UEM  
INVERNO 2012

## Prova 3 – Matemática

### QUESTÕES OBJETIVAS

Nº DE ORDEM:

Nº DE INSCRIÇÃO:

NOME DO CANDIDATO:

### INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

- Confira os campos Nº DE ORDEM, Nº DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
- Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
- É proibido folhear o Caderno de Provas antes do sinal, às 9 horas.**
- Após o sinal, confira se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
- O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas após o início da resolução da prova.
- No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
- Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das alternativas 01 e 08).
- Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.
- Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante abaixo e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.

09	13
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Corte na linha pontilhada.

### RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – INVERNO 2012

Nº DE ORDEM:

NOME:

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20



UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 1

## Questão 01

Acerca da função real  $f$ , definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{2x^2 - 4x + 5}, \text{ assinale o que for } \mathbf{correto}.$$

- 01)  $f(0) > f(1)$ .
- 02) A função é positiva no intervalo  $[0,5]$  da reta real.
- 04) Não existe número real  $a$  para o qual  $f(a) = \frac{1}{2}$ .
- 08)  $f(-1) = \frac{24}{11}$ .
- 16) O ponto  $(2,1)$  está situado acima do gráfico da função  $f$ .

## Questão 02

Considere a seguinte função polinomial

$$p(x) = x^4 - 3x^2 - 4. \text{ Assinale o que for } \mathbf{correto}.$$

- 01) Nenhum zero da função é real.
- 02) Geometricamente, os zeros da função são vértices de um quadrado no plano complexo.
- 04) Um zero da função é  $z = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sen \frac{\pi}{2})$ .
- 08) A função possui dois zeros reais e dois zeros imaginários.
- 16) O resto da divisão de  $p(x)$  por  $x^2 + 1$  é zero.

## Questão 03

Considere as seguintes propriedades para matrizes do tipo  $2 \times 2$ : (i)  $A^2 = A$ ; (ii)  $B^2 = I$ , em que  $I$  é a matriz identidade, e assinale o que for **correto**.

- 01) Qualquer matriz que satisfaça a propriedade (i) é invertível.
- 02) Qualquer matriz que satisfaça a propriedade (ii) é invertível.
- 04) Se uma matriz satisfaz a propriedade (i), então  $\det(A) = 1$  ou  $\det(A) = 0$ .
- 08) Se  $A$  satisfaz a propriedade (i), então  $A^n = A$  para todo número natural  $n \geq 2$ .
- 16) Se  $B$  satisfaz a propriedade (ii), então  $\det(B) = \pm 1$ .

**Questão 04**

Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $xOy$  e três retas com equações  $r_1: 2x - 2y + 2 = 0$ ;  $r_2: y - x - 2 = 0$  e  $r_3: x - 1 = 0$ . Sejam  $A$  o ponto de interseção de  $r_1$  e  $r_3$ , e  $B$  o ponto de interseção de  $r_2$  e  $r_3$ , assinale o que for **correto**.

- 01) A área do triângulo  $ABO$  é  $\frac{1}{2}$  u.a.
- 02) As retas  $r_1$  e  $r_2$  são perpendiculares.
- 04) A reta  $r_3$  é perpendicular ao eixo  $Ox$ .
- 08) O ângulo formado pelas retas  $r_1$  e  $r_3$  mede  $60^\circ$ .
- 16) A distância entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  é 1 u.c.

**Questão 05**

Considere um triângulo  $ABC$ , no qual os lados  $AB$  e  $AC$  possuem o mesmo comprimento, a bissetriz do ângulo  $\hat{B}CA$  intercepta  $AB$  em  $P$ , e o comprimento de  $AP$  é igual ao comprimento de  $CP$ . Assinale o que for **correto**.

- 01) O ângulo  $\hat{B}AC$  mede  $36^\circ$ .
- 02) O segmento  $CP$ , além de ser bissetriz de  $\hat{B}CA$ , é mediana com relação ao lado  $AB$ .
- 04) Os triângulos  $BPC$  e  $BCA$  são semelhantes.
- 08) Os triângulos  $BPC$  e  $APC$  são congruentes.
- 16) O triângulo  $BPC$  é isósceles.

**Rascunho**

**Questão 06**

Alguns tipos de embalagens de bolas de tênis têm a forma de um cilindro, onde as bolas são colocadas uma sobre a outra. Considere uma embalagem contendo 4 bolas de tênis, cada bola com diâmetro de 6,4 cm, e suponha que a embalagem fechada seja um cilindro circular reto com diâmetro da base igual ao das bolas e cuja altura seja a soma dos diâmetros das 4 bolas. Desprezando as espessuras das bolas e da embalagem, bem como quaisquer deformações nelas, e considerando  $\pi = 3$ , assinale o que for **correto**.

- 01) O volume da embalagem é menor do que  $800\text{cm}^3$ .  
02) Cada bola ocupa um espaço com volume menor do que  $130\text{cm}^3$ .  
04) A área de superfície de cada uma das bolas é menor do que  $120\text{cm}^2$ .  
08) O volume do espaço livre, entre as bolas e a embalagem, é menor do que  $280\text{cm}^3$ .  
16) A área lateral da embalagem é maior do que  $520\text{cm}^2$ .

**Questão 07**

Uma indústria de celulose adquiriu uma área de 1.000 hectares com eucaliptos prontos para serem cortados. No primeiro mês, a indústria cortou 10 hectares; no mês seguinte, cortará 15 hectares, e assim sucessivamente, aumentando em 5 hectares a área cortada no mês anterior, até chegar à capacidade máxima de corte, que é de 50 hectares. A partir daí a indústria manterá o corte mensal em 50 hectares. Além disso, essa indústria quer formar uma área de reflorestamento com árvores nativas da região. Por isso, a cada mês uma área proporcional a 10% da área cortada é reservada para o reflorestamento. Com relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) Em 15 meses, a indústria conseguirá uma área para reflorestamento correspondente a mais de 5% da área total.  
02) A sequência numérica formada pela quantidade de hectares cortados a cada mês, até chegar à capacidade máxima de corte, forma uma progressão geométrica.  
04) Nos 12 primeiros meses, a indústria terá cortado 420 hectares de eucalipto.  
08) A indústria atingirá capacidade máxima de corte no nono mês.  
16) Em 23 meses, a indústria conseguirá cortar todos os 1.000 hectares de eucalipto.

**Questão 08****Rascunho**

Considere os dois sistemas de equações lineares

$$A: \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = -3 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad B: \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ y - z = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

e assinale o que for **correto**.

- 01) Os sistemas lineares A e B são equivalentes.
- 02) O sistema linear B não está na forma escalonada.
- 04) O sistema linear A é possível e indeterminado.
- 08) O sistema linear B é impossível.
- 16) O conjunto solução do sistema B está contido no conjunto solução do sistema A.

**Questão 09**

Pedro possui 180 músicas armazenadas, das quais 80 são do gênero pagode, 60 do gênero sertanejo e as restantes, de rock. Ele sempre as escuta no modo *shuffle*, em que as músicas são executadas em ordem aleatória, sem repetição das que já foram executadas. Levando em conta esses dados, assinale o que for **correto**.

- 01) Considerando-se apenas as três primeiras músicas executadas, não sendo duas delas de um mesmo gênero, o número de maneiras de escolhê-las, levando-se em conta a ordem de execução, é exatamente  $80 \times 60 \times 40$ .
- 02) Se as primeiras duas músicas executadas são do gênero sertanejo, a probabilidade de que a próxima também seja é de  $1/58$ .
- 04) Se a duração total das músicas de Pedro é de 10 horas e meia, a duração média de cada uma é superior a 3 minutos.
- 08) Considerando o total de músicas dos três gêneros, o menor número de músicas que preserve a proporção entre os gêneros musicais é 9.
- 16) O número mínimo de músicas que Pedro deve ouvir para ter certeza de que ouvirá uma de cada gênero é 81.

**Questão 10**

A respeito dos subconjuntos do plano de Argand-Gauss:

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\},$$

$$Y = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 2\},$$

$$Z = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + (\bar{z})^2 = 2\},$$

é **correto** afirmar que

- 01)  $X$  é finito.  
 02)  $X \subset Y$ .  
 04)  $X \cap Z = \emptyset$ .  
 08)  $Y$  é uma reta vertical no plano de Argand-Gauss.  
 16)  $Y \cap Z$  possui uma quantidade infinita de elementos.

**Questão 11**

Assinale o que for **correto**.

01)  $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ .

02)  $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$ .

04)  $\frac{1}{90} = 0,01010101\dots$

08)  $\frac{15}{4}$ ,  $\frac{7}{3}$  e  $\sqrt[3]{80}$  pertencem ao intervalo real  $[2, 4]$ .

16) A multiplicação de quaisquer dois números irracionais resulta sempre em um número irracional.

**Questão 12**

Considerando  $ABCD$  um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de centro  $O$ , assinale o que for **correto**.

- 01) Se  $ABCD$  é um paralelogramo, então necessariamente trata-se de um retângulo.  
 02) Se os ângulos  $\hat{A}BC$  e  $\hat{B}CD$  medem, respectivamente,  $75^\circ$  e  $120^\circ$ , os demais ângulos internos de  $ABCD$  são agudos.  
 04) Se o raio da circunferência mede 2 cm e  $ABCD$  é um quadrado, a área do mesmo é  $8 \text{ cm}^2$ .  
 08) Se o centro da circunferência pertence à diagonal  $BD$ , o ângulo  $\hat{B}CD$  é reto.  
 16) Se a diagonal  $BD$  possui o mesmo comprimento do raio da circunferência, um dentre os ângulos  $\hat{B}CD$  e  $\hat{B}AD$  mede  $150^\circ$ .

Rascunho

**Questão 13**

Considere uma circunferência com centro  $O(0,0)$  e raio 2, e três pontos  $A, B$  e  $C$  sobre esta circunferência, sendo  $A$  um ponto do primeiro quadrante e que dista 1 do eixo  $Oy$ ,  $B$  o ponto diametralmente oposto a  $A$ , e  $C$  um ponto que dista 2 do ponto  $A$ . Assinale o que for **correto**.

- 01) O ponto  $C$  está no segundo quadrante ou está sobre o eixo  $Ox$ .
- 02) A área do setor circular definido pelo menor arco  $AC$  é  $\frac{1}{6}$  da área delimitada pela circunferência.
- 04) A área do triângulo  $AOC$  é 2 u.a.
- 08) A distância entre os pontos  $B$  e  $C$  é  $2\sqrt{3}$  u.c.
- 16) O triângulo  $ABC$  é um triângulo retângulo.

**Questão 14**

No primeiro dia de aula, uma professora de Inglês do Ensino Médio entregou um questionário para avaliar o conhecimento prévio dos 40 alunos. A primeira questão era “quantos anos você cursou inglês fora da escola?”. A resposta de todos os alunos (meninos e meninas) foi um número inteiro não negativo estritamente menor do que 5. Sete alunos responderam “zero”, catorze alunos responderam “um”, dez alunos responderam “dois”, oito alunos responderam “três” e apenas um aluno respondeu “quatro”. Além disso, das vinte meninas que há na sala, treze cursaram pelo menos dois anos de inglês fora da escola. Considerando essas informações, assinale o que for **correto**.

- 01) A média de anos de inglês cursados fora da escola, nessa turma, é superior a 1,5.
- 02) A mediana da amostragem é 2 anos.
- 04) Escolhendo-se ao acaso um aluno, a probabilidade de se escolher uma menina ou alguém que cursou um ano ou menos de inglês fora da escola é superior a  $\frac{3}{4}$ .
- 08) Escolhendo-se ao acaso um aluno, a probabilidade de se escolher um menino que tenha cursado pelo menos dois anos de inglês fora da escola é inferior a  $\frac{1}{8}$ .
- 16) No caso em que três meninas cursaram exatamente três anos, dez meninas cursaram exatamente dois anos e as demais não cursaram inglês fora da escola, a média de anos que as meninas da sala cursaram inglês fora da escola é inferior à média dos meninos que cursaram inglês fora da escola.

**Questão 15**

Considere um prisma reto cuja base é um pentágono não regular  $ABCDE$ , em que os lados  $AB$  e  $EA$  medem  $10\sqrt{2}$  cm, o lado  $CD$  mede 20 cm e os lados  $BC$  e  $DE$  são perpendiculares ao lado  $CD$  e têm metade da sua medida. Sabendo que a altura desse prisma é de 10 cm, assinale o que for **correto**.

- 01) A área lateral desse prisma mede  $600\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>.
- 02) O volume do prisma é 3.000 cm<sup>3</sup>.
- 04) O prisma tem 7 faces retangulares.
- 08) A área total do prisma é 1.200 cm<sup>2</sup>.
- 16) O prisma tem 10 vértices.

**Questão 16**

Considere as funções  $f(x) = \log(2^{x^2-1})$  e  $g(x) = 2x - 1$ , e assinale o que for **correto**.

- 01) O domínio da função  $f$  é o conjunto  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$ .
- 02)  $(f \circ g)(x) = \log(16^{x^2-1})$ .
- 04) A função  $f$  é injetora.
- 08) O valor mínimo de  $f$  é  $-\log(2)$ .
- 16) Para  $x \in [-1, 1]$  tem-se  $f(x) \leq 0$ .

**Rascunho**



**Questão 17**

Assinale o que for **correto**.

- 01) Um ângulo que mede 2 radianos é agudo.
- 02) Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \sin(\sin x)$  para todo  $x$  real; então  $g(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , para todo  $x$  real.
- 04) Para todo  $x$  real,  $(\sin x)^2 \leq |\sin x|$ .
- 08) Para todo  $x$  real,  $\cos(2x) = 1 - 2(\sin x)^2$ .
- 16) Um triângulo é obtusângulo se, e somente se, o quadrado do lado maior é superior à soma dos quadrados dos lados menores.

**Questão 18**

Considere os polinômios  $p(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$  e  $q(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ . Sabendo que  $p(x) = 0$  e  $q(x) = 0$  têm como raízes somente números inteiros e que 1 é uma raiz em comum, assinale o que for **correto**.

- 01) O resto da divisão de  $p(x)$  por  $q(x)$  é zero.
- 02) As raízes de  $p(x) = 0$ , colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética.
- 04) As raízes de  $q(x) = 0$ , colocadas em ordem crescente, formam uma progressão geométrica.
- 08) A soma das quatro raízes de  $p(x) = 0$  com as três raízes de  $q(x) = 0$  é um número negativo.
- 16) O resto da divisão de  $p(x)$  por  $x^2 - 1$  é  $x - 2$ .

**Rascunho**

**Questão 19**

Acerca dos lugares geométricos do plano cartesiano dados pelas equações  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 - y^2 = 1$ , assinale o que for **correto**.

- 01) A primeira equação representa uma parábola.
- 02) A segunda equação representa uma hipérbole.
- 04) Os pontos de interseção dessas curvas pertencem ao eixo das ordenadas.
- 08) Os focos da cônica dada pela equação  $x^2 - y^2 = 1$  pertencem ao eixo das abscissas.
- 16) A reta de equação  $x - y + \sqrt{2} = 0$  tangencia a curva dada por  $x^2 + y^2 = 1$ .

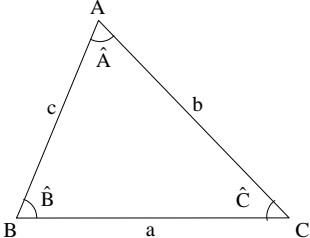
**Questão 20**

Considerando o espaço tridimensional, suponha que  $r$  e  $s$  sejam retas perpendiculares em um ponto A, e que  $s$  seja concorrente com uma reta  $t$  em um ponto B diferente de A. Com relação ao exposto, assinale o que for **correto**.

- 01) Se a reta  $s$  é perpendicular à reta  $t$ , então a reta  $r$  também é perpendicular à reta  $t$ .
- 02) Se a reta  $t$  é concorrente com a reta  $r$ , então as retas  $r, s$  e  $t$  são coplanares.
- 04) Se a reta  $t$  é paralela à reta  $r$ , então as retas  $r, s$  e  $t$  estão contidas em um mesmo plano.
- 08) Se as retas  $r$  e  $t$  são reversas, então  $r$  e  $t$  não são ortogonais.
- 16) Se a reta  $t$  é perpendicular ao plano que contém  $r$  e  $s$ , então a reta  $r$  é ortogonal à reta  $t$ .

**Rascunho**

# MATEMÁTICA – Formulário

<p>Trigonometria</p>	$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$	 <p><i>Lei dos cossenos:</i></p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$
<p>Geometria Plana e Espacial</p>	<p>Comprimento da circunferência: <math>C = 2\pi R</math></p> <p>Área do triângulo:</p> $A = \frac{bh}{2}$ <p>Área do retângulo: <math>A = bh</math></p> <p>Área do círculo: <math>A = \pi R^2</math></p> <p>Área lateral do cilindro: <math>A = 2\pi Rh</math></p> <p>Área do setor circular: <math>A = \frac{R^2\alpha}{2}</math></p> <p>Área da superfície esférica: <math>A = 4\pi R^2</math></p>	<p>Volume do prisma: <math>V = B \cdot h</math></p> <p>Volume do cilindro: <math>V = \pi R^2 h</math></p> <p>Volume da esfera: <math>V = \frac{4}{3} \pi R^3</math></p>
<p>Progressões</p>	<p>Progressão Aritmética (P. A.):</p> $a_n = a_1 + (n - 1)r$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$	
<p>Geometria Analítica</p>	<p>Área do triângulo de vértices <math>P(x_1, y_1)</math>, <math>Q(x_2, y_2)</math> e <math>R(x_3, y_3)</math>:</p> $A = \frac{1}{2}  D , \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	<p>Distância de um ponto <math>P(x_0, y_0)</math> à reta <math>r: ax + by + c = 0</math>:</p> $d_{P,r} = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$