Vestibular de Verão UEM 2013

Prova 3 – Matemática

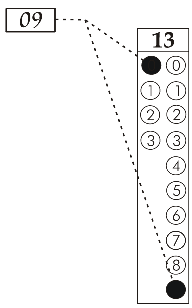
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, que constam da etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante da etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. **É proibido folhear o Caderno de Questões antes do sinal, às 9 horas**.
4. Após o sinal, verifique se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 2 horas e 30 minutos após o início da resolução da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluso o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta será a soma dos números associados às alternativas corretas. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme o exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).



8. Este Caderno de Questões não será devolvido. Assim, se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas, constante abaixo, e destaque-o, para recebê-lo hoje, no horário das 13h15min às 13h30min.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.
10. São de responsabilidade do candidato a leitura e a conferência de todas as informações contidas no Caderno de Questões e na Folha de Respostas.

Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS – PROVA 3 – VERÃO 2013

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

UEM – Comissão Central do Vestibular Unificado

GABARITO 1

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$(\text{sen}\, x)^2 + (\cos x)^2 = 1$	$\text{sen}(x+y) = \text{sen}\, x \cos y + \text{sen}\, y \cos x$
Geometria Plana, Espacial e Analítica	Área do triângulo: $A = \dfrac{\text{bh}}{2}$ Área do círculo $A = \pi r^2$ Volume do tronco de cone: $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$ Volume do cilindro: $V = \pi r^2 h$ Distância entre pontos: $\text{d}=\sqrt{(\text{x}_1-\text{x}_0)^2+(\text{y}_1-\text{y}_0)^2}$	Área do triângulo: $A = \frac{1}{2}\left\lvert \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right\rvert$ Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$ $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou $\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ Hipérbole: $c^2 = b^2 + a^2$ $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ou $-\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ $e = \dfrac{c}{a}$
Binômio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$	
Funções	Função quadrática $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$	
Progressões	Progressão Aritmética (P. A.): $\text{a}_\text{n} = \text{a}_1 + (\text{n}-1)\text{r}$ $\text{S}_\text{n} = (\text{a}_1 + \text{a}_\text{n})\dfrac{\text{n}}{2}$	

GABARITO 1

MATEMÁTICA

Rascunho

Questão 01

Com base nos conhecimentos de geometria plana, assinale o que for **correto**.

01) O maior ângulo interno de um triângulo qualquer nunca possui medida inferior a 60^{o}.
02) Se r, s e t são retas contidas em um mesmo plano e r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.
04) Se r, s e t são retas contidas em um mesmo plano e r é perpendicular a s e s é perpendicular a t, então r é perpendicular a t.
08) Dois triângulos semelhantes com razão de semelhança 1 são sempre congruentes.
16) O perímetro de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio R é igual a $2nR\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Questão 02

Um aluno desenhou, em um plano cartesiano, duas cônicas (elipse ou hipérbole), uma de excentricidade 0,8 e outra de excentricidade 2,4, tendo ambas como foco o par de pontos $(-12,0)$ e $(12,0)$. Assinale o que for **correto**.

01) A cônica de excentricidade 0,8 é uma hipérbole.
02) A cônica de excentricidade 2,4 passa pelo ponto (5,0).
04) As cônicas descritas possuem quatro pontos em comum.
08) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$ é uma equação para a cônica de excentricidade 0,8.
16) A cônica de excentricidade 0,8 passa pelo ponto (0,9).

GABARITO 1

Questão 03

Em relação à sequência infinita de números inteiros, cujo n-ésimo termo é obtido pela fórmula $a_n = 3n + 6$, para todo inteiro positivo n, assinale o que for **correto**.

01) Essa sequência é uma progressão aritmética de razão 3.
02) Todos os termos dessa sequência são múltiplos de 3.
04) $a_4 = 18$.
08) Para todo inteiro positivo n, o termo a_n divide o termo a_{n+3}.
16) Para todo inteiro $n > 2$, vale a seguinte igualdade $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \dfrac{3n^2 + 15n}{2}$.

Questão 04

A superfície de uma piscina tem o formato de um círculo de raio 4 metros. A profundidade abaixo de cada ponto na superfície da piscina é descrita pela função

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{3} & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ 3 & \text{se } 3 < x \le 4 \end{cases}$$

em que x é a distância, em metros, do ponto na superfície da piscina até a borda da piscina. Assinale o que for **correto**.

01) A profundidade da piscina em um ponto que está a 2 metros da borda é de 2,5 metros.
02) Uma pessoa que não deseje ir a uma parte da piscina que tenha profundidade acima de 1,5 metro pode afastar-se, no máximo, 1,5 metro da borda.
04) Se dois pontos estão a distâncias distintas da borda da piscina, então as profundidades abaixo deles também são distintas.
08) O sólido que descreve a piscina é a união de dois cilindros com um tronco de cone.
16) O volume de água que cabe dentro da piscina é $24\pi\, m^3$.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 05

Considere, no plano cartesiano, a circunferência λ de raio 1 unidade de comprimento com centro no ponto Q de coordenadas (1,0). Sendo O a origem dos eixos coordenados e A o ponto de coordenadas (2,0), assinale o que for **correto**.

01) O ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ pertence a λ.

02) Todo ponto P de coordenadas (x,y) pertencente à circunferência e, com y positivo, satisfaz a equação $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$.

04) A área do círculo delimitado pela circunferência λ é de 2π unidades de área.

08) Os pontos P da circunferência para os quais o triângulo APO possui a maior área são aqueles de abscissa (coordenada x) igual a 1.

16) Para qualquer ponto P de coordenadas (x,y) pertencente à circunferência e com $y \neq 0$, o triângulo APO é retângulo.

Questão 06

Muitos problemas podem ser mais bem compreendidos se utilizarmos médias apropriadas. Algumas das médias comumente utilizadas entre dois números reais positivos a e b são as seguintes:

Média Aritmética: $A=\dfrac{a+b}{2}$;

Média Geométrica: $G=\sqrt{a\cdot b}$;

Média Harmônica: $H=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$;

Média Quadrática: $Q=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Sobre essas médias, para quaisquer dois números reais a e b, é **correto** afirmar que

01) $G \leq A$.

02) $A \leq H$.

04) $Q \leq A$.

08) $Q \leq G$.

16) todas as médias coincidem, se $a = b$.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 07

Em relação às funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 + x - 1$ e $g(x) = 2^x$, para todo x real, assinale o que for **correto**.

01) A função g é injetora.

02) Para todo x real, $(g \circ f)(x) \geq \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

04) $(f \circ g)(x) = 2^{2x} + 2^x - 1$, para todo x real.

08) $f(-1) = -3$.

16) $g(-2) = -4$.

Questão 08

Considere o sistema linear com 3 equações e com 3 incógnitas representado matricialmente por $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sobre essas matrizes e o sistema linear associado, assinale o que for **correto**.

01) O produto da transposta da matriz A pela matriz A é igual à matriz identidade, isto é, $A^t.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

02) A matriz A não possui inversa.

04) O produto da transposta da matriz A pela matriz B é uma matriz cujas entradas fornecem a única solução do sistema $AX = B$.

08) Se a matriz B tivesse todas as entradas iguais a zero, então o sistema $AX = B$ não teria solução.

16) O determinante da matriz A é igual a 0.

Rascunho

Questão 09

Com base nos conhecimentos sobre as propriedades de números reais, assinale o que for **correto**.

01) $(x^3 - y^3) = (x - y)^3$, para quaisquer x e y reais.

02) $\left(\frac{5}{3} - \frac{8}{5}\right)\left(\frac{27}{5} + \frac{96}{10}\right) = 1$.

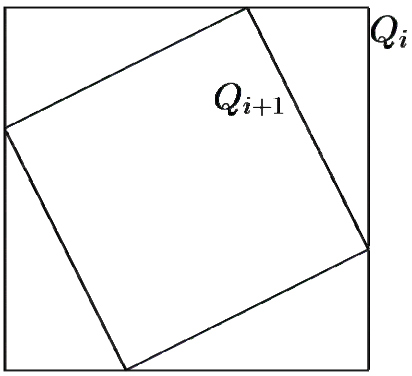
04) Se $a > 0$ e $\sqrt{a} < a$, então $\sqrt{\sqrt{a}} > \sqrt{a}$.

08) O resultado da soma de um número racional por um irracional é sempre um irracional.

16) Para todo real a, a equação $x^2 = a$ possui solução real.

Questão 10

Uma sequência infinita de quadrados é construída da seguinte forma: dado um quadrado Q_i, constrói-se outro quadrado Q_{i+1}, cujos vértices estão sobre os lados de Q_i e de tal forma que a distância de qualquer vértice de Q_{i+1} ao vértice de Q_i mais próximo dele é igual a 1/3 do lado de Q_i.



Sobre essa sequência de quadrados, assinale o que for **correto**.

01) O lado do quadrado Q_{i+1} é igual a 5/9 do lado do quadrado Q_i.

02) A área do terceiro quadrado construído é menor do que a metade da área do primeiro quadrado.

04) A sequência formada pelas áreas dos quadrados construídos dessa forma é uma progressão geométrica de razão 5/9.

08) A sequência formada pelos lados dos quadrados construídos é uma progressão aritmética de razão $\sqrt{5}/3$.

16) As diagonais de todos os quadrados construídos se intersectam no mesmo ponto.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 11

Dados os inteiros não negativos n e k, sendo $k \leq n$, define-se o símbolo $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Para cada inteiro $n > 1$, considere $p_n(x)$ como sendo o polinômio $\binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}$.

Assinale o que for **correto**.

01) $p_4(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

02) Para todo inteiro n positivo, o polinômio $p_n(x)$ admite raízes não reais.

04) Para todos os valores de n, o polinômio $p_n(x)$ é divisível por $x + 1$.

08) Para todo inteiro $n > 2$, existem dois números racionais distintos, a e b, para os quais $p_n(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$.

16) Para cada inteiro positivo n, a soma de todos os coeficientes de $p_n(x)$ é 2^n.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 12

Três lojas, *A*, *B* e *C*, vendem um mesmo produto cujo preço é R$ 900,00, mas oferecem formas de pagamento diferentes, conforme descrito abaixo.

- Loja *A* – Dá um desconto de 10 % para pagamento a vista.
- Loja *B* – Parcela o valor em 2 meses, sem juros, com o primeiro pagamento para 1 mês após a compra.
- Loja *C* – Dá um desconto de 10 % em metade do valor, que deve ser pago a vista, e deixa o pagamento da outra metade para 1 mês após a compra.

João tem exatamente R$ 900,00 depositados em uma aplicação que lhe rende 10 % ao mês. Suponha que João pretenda utilizar esse dinheiro para comprar tal produto e que, feita a escolha da loja, ele irá realizar saques mensais da sua aplicação no dia de vencimento e no valor exato da parcela que deve pagar. Nessa situação, assinale o que for **correto**.

01) Se João comprar na loja *A*, então, 2 meses após a compra, ele terá R$ 110,00 aplicados.
02) Se João comprar na loja *B*, então, exatamente após efetuar o primeiro pagamento, ele terá R$ 540,00 aplicados.
04) Se João comprar na loja *C*, então, logo após terminar de pagar pelo produto, restarão a ele R$ 94,50 aplicados.
08) Se comprar na loja *B*, João levará mais tempo para pagar o produto, mas, para ele, essa opção é financeiramente melhor do que comprar na loja *C*.
16) Financeiramente, a melhor opção de compra é sempre pagar a vista com desconto, independentemente de como se pode aplicar o dinheiro.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 13

O desempenho de um time de futebol em cada partida depende do seu desempenho no jogo anterior. A tabela abaixo apresenta as probabilidades de esse time ganhar, empatar ou perder um jogo, tendo em vista o resultado do jogo anterior.

		PROBABILIDADE DE		
		GANHAR	EMPATAR	PERDER
RESULTADO DO JOGO ANTERIOR	GANHOU	0,5	0,3	0,2
	EMPATOU	0,2	0,6	0,2
	PERDEU	0,3	0,3	0,4

Considere P a matriz formada pelas entradas da tabela de probabilidades dada acima e assinale o que for **correto**.

01) As entradas da diagonal da matriz P representam as probabilidades de o time conseguir, no jogo atual, o mesmo resultado (vitória, empate ou derrota) do jogo anterior.

02) A probabilidade de o time ganhar o seu terceiro jogo não depende do resultado do primeiro jogo.

04) A probabilidade de o time ganhar o terceiro jogo, tendo perdido o primeiro, é de 30 %.

08) Se o time tem 50 % de chance de ganhar o primeiro jogo e 40 % de chance de empatá-lo, então a probabilidade de ele perder o segundo jogo é de 22 %.

16) As entradas da matriz P^2 (multiplicação de P por P) representam as probabilidades de cada resultado do time no terceiro jogo (vitória, empate ou derrota), tendo em vista o resultado do primeiro jogo.

Questão 14

Considere $z = a + ib$ um número complexo, com a e b reais e não nulos, e $\bar{z} = a - ib$ o seu conjugado. Sobre esses números complexos e a sua representação no plano complexo, assinale o que for **correto**.

01) O produto $z \cdot \bar{z}$ é um número real positivo cuja raiz quadrada fornece a distância de z e de $\bar{z}$ até a origem.

02) O ponto do plano complexo que representa $\bar{z}$ é obtido do ponto que representa z fazendo uma rotação de 180º em torno da origem.

04) Se $z^2 = i$, então $\left(\bar{z}\right)^2 = i$.

08) Se w é um número complexo que está à mesma distância de z e de $\bar{z}$, então w é um número real.

16) O quociente $\frac{z}{\bar{z}}$ é um número real.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 15

Quinze candidatos a uma vaga foram submetidos a um teste seletivo que consta de 5 questões de múltipla escolha com cinco alternativas cada (de (a) a (e)), sendo que, em cada questão, há apenas uma alternativa correta. A pontuação de cada candidato na prova corresponde ao número de questões que ele acertou. Sabendo que dois candidatos zeraram a prova, quatro candidatos obtiveram nota 1, três candidatos obtiveram nota 2, três candidatos obtiveram nota 3, um candidato obteve nota 4 e dois candidatos obtiveram nota 5, assinale o que for **correto**.

01) Escolhendo um candidato ao acaso, a probabilidade de se escolher um que obteve nota superior a 3 é de $\frac{1}{5}$.
02) A média das notas foi 2,2.
04) A mediana das notas foi 3.
08) Se um candidato responde às 5 questões de forma equilibrada, isto é, escolhendo alternativas distintas para questões distintas, e se o gabarito também estiver equilibrado, então a probabilidade de ele acertar exatamente 4 questões é $\frac{1}{4!}$.
16) O número total de maneiras possíveis de se escolher exatamente uma alternativa de cada questão é 5!.

Questão 16

Representar um número natural $n \geq 1$ na forma binária significa escrevê-lo somando potências de 2 da seguinte forma: $n = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$, em que cada coeficiente a_i, com $0 \leq i \leq k-1$, pode ser 0 ou 1 e $a_k \neq 0$. Nesse caso, diz-se que $\left[a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0\right]_2$ é a representação binária de n e que os coeficientes a_i são os algarismos dessa representação. Sobre a representação binária, assinale o que for **correto**.

01) A representação binária do número três é $[11]_2$.
02) $[101]_2 + [111]_2 = [1100]_2$.
04) $\left([10101]_2\right)^2 = [1010101]_2$.
08) O número 2013, quando representado na forma binária, tem 10 algarismos.
16) Se o número natural n, quando representado na forma binária, tem k algarismos, então $k - 1 \leq \log_2 n < k$.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 17

Considere um triângulo *ABC* retângulo em *A*, a circunferência λ que passa pelos pontos *A*, *B* e *C* e considere *D* o ponto de $\overline{BC}$ de modo que $\overline{AD}$ é uma altura do triângulo *ABC*. Sendo o ponto *O* o centro de λ, assinale o que for **correto**.

01) A mediana relativa ao lado *BC* mede metade do comprimento do lado *BC*.
02) O comprimento do lado *BC* é igual à soma dos comprimentos dos lados *AB* e *AC*.
04) Os triângulos *ABC*, *DBA* e *DAC* são semelhantes.
08) O segmento $\overline{BC}$ é um diâmetro da circunferência λ.
16) Se o triângulo *ABC* é isósceles, sua área corresponde a mais de um terço da área do círculo delimitado por λ.

Questão 18

Considere as retas *r*, *s* e *t* no plano cujas equações são

$$r: x + y = 1,$$
$$s: 2x + y = 0,$$
$$t: x - 2y = 1.$$

Sobre essas retas, assinale o que for **correto**.

01) A interseção das retas *r* e *s* é o ponto $(-1, 2)$, das retas *r* e *t* é o ponto $(1, 0)$ e das retas *s* e *t* é o ponto $(1/5, -2/5)$.
02) As retas *s* e *t* são perpendiculares.
04) O ponto de interseção das retas *r* e *t* está a uma distância igual a $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ da reta *s*.
08) A área do triângulo delimitado por essas retas é 6/5.
16) A tangente do ângulo agudo formado pelas retas *r* e *s* é 3.

Rascunho

GABARITO 1

Questão 19

Com base nos conhecimentos de trigonometria, assinale o que for **correto**.

01) Para todo x pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\operatorname{sen} x > \cos x$.

02) Não existe solução para a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ no intervalo $[0,3]$.

04) Para todo x real, $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

08) Existe $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ satisfazendo a desigualdade $x < \operatorname{sen} x$.

16) Para todo x real, $-\frac{1}{2} \leq (\operatorname{sen} x)(\cos x) \leq \frac{1}{2}$.

Questão 20

Em um dia, em uma determinada região plana, o Sol nasce às 7 horas e se põe às 19 horas. Um observador, nessa região, deseja comparar a altura de determinados objetos com o comprimento de suas sombras durante o transcorrer do dia. Para isso, ele observa que o ângulo de incidência dos raios solares na região varia de 0º (no nascer do Sol) a 180º (no pôr do Sol) e aumenta de modo proporcional ao tempo transcorrido desde o nascer do Sol. Sobre essa situação, assinale o que for **correto**.

01) Às 11 horas, o ângulo de incidência dos raios solares na região é igual a 60º.
02) O ângulo de incidência dos raios solares é reto exatamente às 12 horas.
04) Às 10 horas da manhã, o comprimento da sombra de qualquer objeto nessa região é igual à sua altura.
08) No início do dia, o comprimento das sombras é inversamente proporcional à tangente do ângulo de incidência.
16) O comprimento da sombra de um prédio com 20 metros de altura, às 9 horas da manhã, é $20\sqrt{3}$ metros.

Rascunho

GABARITO 1