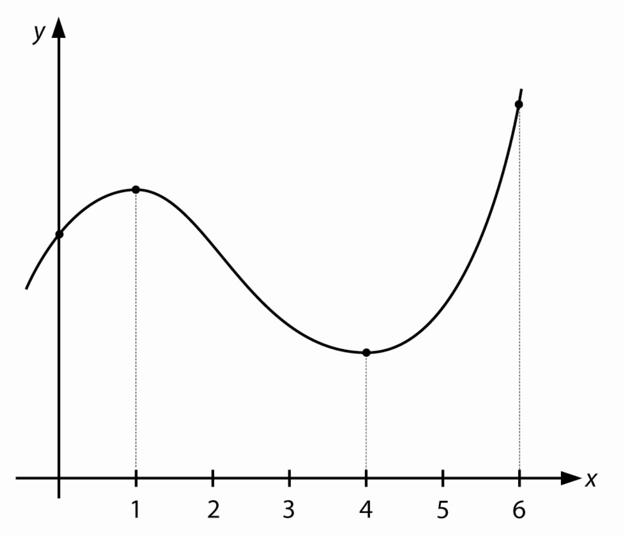
Matemática Aplicada

1 Em certo mês, o Departamento de Estradas registrou a velocidade do trânsito em uma rodovia. A partir dos dados, é possível estimar que, por exemplo, entre 12:00 horas e 18:00 horas em um dia de semana normal, a velocidade registrada em um posto de pedágio é dada pela função $f(x)=2x^3-15x^2+24x+41$ km/h, sendo x o número de horas após o meio-dia . Assim, por exemplo, $f(0)$ expressa a velocidade ao meio-dia. O gráfico de f(x) está representado ao lado.



A Quais são a velocidade máxima e a velocidade mínima registradas entre 12:00 horas e 18:00 horas?

B O número complexo $\frac{17-i\sqrt{39}}{4}$ é uma raiz da equação $2x^3-15x^2+24x+41=0$. Quais são as outras duas raízes?

Resolução

A *Observe os valores da função:*
f(0)= 41; 41 km/k
f(1) = 2 – 15 + 24 + 41 = 52; 52 km/h
f(4) = 128 – 240 + 96 + 41 = 25: 25 km/k
f(6) = 432 – 540 + 144 + 41 = 77; 77 km/h

A velocidade máxima é 77 km/h, às 18:00 horas.

A velocidade mínima é 25 km/h, às 16:00 horas.

B *Outra raiz da equação é o número complexo conjugado* $\frac{17+i\sqrt{39}}{4}$.

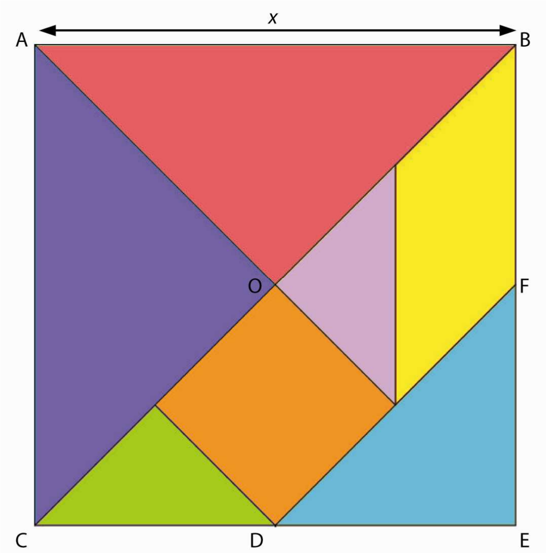
Soma $= \frac{17-i\sqrt{39}}{4}+\frac{17+i\sqrt{39}}{4}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$

Produto $= \frac{(17-i\sqrt{39}).(17+i\sqrt{39})}{4.4}=\frac{328}{16}=\frac{41}{2}$

O polinômio $2x^3-15x^2+24x+41$ *é divisível por* $2x^2-17x+41$ *e o quociente é* $x+1$.

As raízes da equação são $\frac{17-i\sqrt{39}}{4}$, $\frac{17+i\sqrt{39}}{4}$ *e -1.*

2 A figura mostra um Tangran chinês, que é um quadrado subdividido em sete figuras: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um paralelogramo e um quadrado pequeno.



A Comprove que a área do triângulo AOB é igual à soma das áreas dos dois triângulos pequenos mais a área do quadrado pequeno.

B Comprove que a área do paralelogramo mais a área do triângulo DEF é igual à área do triângulo COA.

Resolução

A Área do triângulo AOB $\rightarrow \frac{1}{2}(x.\frac{x}{2}) = \frac{x^2}{4}$

Área de 1 triângulo $\rightarrow \frac{1}{2}(\frac{x}{2}.\frac{x}{4}) = \frac{x^2}{16}$

Área do quadrado $\rightarrow l^2 + l^2 = (\frac{x}{2})^2 \rightarrow l^2 = \frac{x^2}{8}$

Soma das áreas dos dois triângulos mais a área do quadrado: $2.\frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{4}$ = área do triângulo AOB

B Área do paralelogramo $\rightarrow \frac{x}{2}.\frac{x}{4} = \frac{x^2}{8}$

Área do triângulo DEF $\rightarrow \frac{1}{2}(\frac{x}{2}.\frac{x}{2}) = \frac{x^2}{8}$

Soma das áreas do paralelogramo e do triângulo DEF: $2.\frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{4}$ = área do triângulo COA

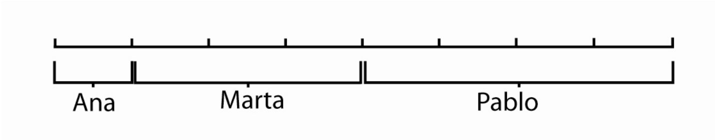
3

A Ana, Marta e Pablo compraram 6 000 selos. O número de selos que comprou Ana é um terço dos que comprou Marta e um quarto dos que comprou Pablo. Quantos selos comprou cada um?

B Ana, Marta e Pablo compraram 48 de outros tipos de selos, mais valiosos. Ana comprou um terço dos que comprou Marta. Cada um dos três comprou pelo menos 5 selos e Pablo foi o que mais selos comprou. Quantos selos pode ter comprado Pablo?

Resolução

A *Podemos interpretar o esquema para resolver o problema:*



Ana comprou $\frac{1}{8}.6000 = 750$ *selos, Marta 3 x 750 = 2 250 selos e Pablo, 4 x 750 = 3 000 selos.*

B *Ana comprou x selos ,Marta 3x e Pablo, y selos.*

Temos que: $x + 3x + y = 48 \rightarrow x = \dfrac{48 - y}{4}$

A tabela nos indica as respostas:

Pablo	*Ana*	*Marta*
y	*x*	*3x*
4	11	33
8	10	30
12	9	27
16	8	24
20	7	21
→ 24	6	18
→ 28	5	15

Pablo pode ter comprado 24 ou 28 selos.

4 Para receber um montante de M reais daqui a x anos, o capital inicial C reais que a pessoa deve aplicar hoje é dado pela equação:

$$C = M.e^{-0,1x}$$

A Se ela aplicar hoje R$ 3 600,00, quanto receberá de juro no período de 1 ano?

B Se ela aplicar hoje R$ 3 600,00, daqui a quanto tempo, aproximadamente, obterá um montante que será o dobro desse valor?

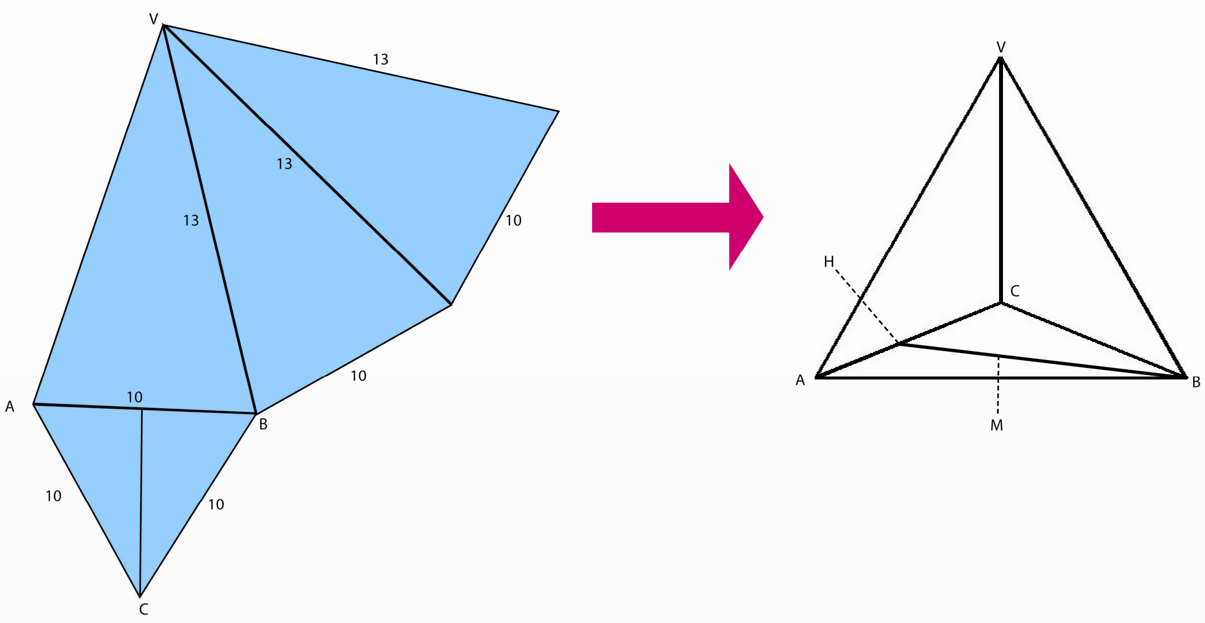
Se necessário, use as aproximações: $e^{0,1} = 1,1; ln2 = 0,7$

Resolução

A $3600 = M.e^{-0,1} \rightarrow M = 3600.1,1 = 3960$
O juro obtido após um ano será de R$ 360,00, aproximadamente.

B $3600 = 7200.e^{-0,1x} \rightarrow x = \dfrac{ln1 - ln2}{-0,1} \rightarrow x = \dfrac{-0,7}{-0,1} = 7$
Após 7 anos, aproximadamente.

5 Com estes quatro triângulos cujas medidas dos lados estão em centímetros, forma-se uma pirâmide triangular. Calcule:



A A área total da superfície da pirâmide.

B O volume da pirâmide.

Resolução

A $A = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} + 3.(\frac{10.12}{2}) = 25\sqrt{3} + 180\ cm^2$

B *Note que M é o baricentro do triângulo ABC e portanto:* $BM = \frac{2}{3}BH \rightarrow BM = \frac{2}{3}(\frac{10\sqrt{3}}{2}) = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Se H é a altura da pirâmide, temos: $13^2 = (\frac{10\sqrt{3}}{3})^2 + H^2 \rightarrow H = \sqrt{\frac{407}{3}}$

O volume da pirâmide é igual a : $\frac{1}{3}.25\sqrt{3}.\frac{\sqrt{407}}{\sqrt{3}} = \frac{25}{3}\sqrt{407}$ cm³.

6 A Secretaria de Transportes de certa cidade autoriza os táxis a fazerem as cobranças a seguir, que são registradas no taxímetro de cada veículo autorizado:

bandeirada (valor inicial do taxímetro) = R$ 4,70;
bandeira I = R$ 1,70 por quilômetro rodado (de segunda a sábado, das 6h às 21h);
bandeira II = R$ 2,04 por quilômetro rodado (de segunda a sábado, das 21h às 6h; domingos e feriados em qualquer horário).

A Em porcentagem, quanto uma viagem de 6 km, em uma segunda-feira, às 22h, é mais cara do que a mesma viagem de 6 km, também em uma segunda-feira, às 8h?

B É possível que uma viagem de *x* km em uma segunda-feira, às 22h, custe 20% a mais do que uma viagem de *x* km, também em uma segunda-feira, às 8h?

Resolução

A *Segunda-feira às 8h é Bandeira I, logo:* $4{,}70 + 6 \times 1{,}70 = 14{,}90$ *reais.*
Segunda-feira às 22h é Bandeira II, logo: $4{,}70 + 6 \times 2{,}04 = 16{,}94$ *reais.*

Como $\frac{16{,}94}{14{,}90} \cong 1{,}137$ *, então a viagem às 22h é aproximadamente 13,7% mais cara do que às 8h.*

B *Deve-se ter:* $\frac{4{,}70 + 2{,}04x}{4{,}70 + 1{,}70x} = 1{,}20 \Rightarrow 4{,}70 + 2{,}04x = 5{,}64 + 2{,}04x \Rightarrow 4{,}70 = 5{,}64$*, o que é absurdo. Logo, não é possível.*

7 Nazareno é muito supersticioso e acha que placas de carro que contêm o algarismo 7 dão azar. Ele quer comprar um carro usado e, num certo dia, ele vê, no jornal, o anúncio de um carro que lhe agrada e, para conhecê-lo, agenda uma visita.
Lembrando que placas de carro no Brasil têm quatro algarismos, qual a probabilidade de que a placa do carro que Nazareno vai conhecer **não** seja considerada por ele como fonte de azar?

Resolução

Como as placas de carro no Brasil têm quatro algarismos, cada um deles podendo variar de 0 a 9 (10 possibilidades para cada um), tem-se, então, $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$ *possibilidades no total para a escolha dos quatro algarismos. Para a placa não ser "azarenta", ela não pode ter o algarismo 7, isto é, há apenas 9 possibilidades para cada algarismo, o que nos dá* $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6.561$ *escolhas favoráveis. Logo, a probabilidade pedida é* $\frac{6561}{10000} = 0{,}6561 \cong 65{,}6\%$.

OBS.:

Como Nazareno não se importa com as letras contidas na placa, essas não influenciam a probabilidade pedida.
Se quisermos excluir a placa com os quatro algarismos iguais a zero (0000), teremos $\frac{6560}{9999} \cong 0{,}6561 \cong 65{,}6\%$.

8 Uma pulga com algum conhecimento matemático brinca, pulando sobre as doze marcas correspondentes aos números das horas de um relógio. Quando ela está sobre uma marca correspondente a um número não primo, ela pula para a primeira marca a seguir, no sentido horário. Quando ela está sobre a marca de um número primo, ela pula para a segunda marca a seguir, sempre no sentido horário.
Se a pulga começa na marca do número 12, onde ela estará após o 2014º pulo?

Resolução

A tabela a seguir mostra a sequência dos primeiros pulos dado pela pulga:

Pulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	..
marcas	1	2	4	5	7	9	10	11	1	2	4	5	7	9	10	11	1	2	..

Assim, observa-se que as marcas correspondentes aos números do relógio se repetem de 8 em 8: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11 voltando ao 1. Portanto, como $2014 \div 8 = 251 \times 8 + 6$*, após o pulo de ordem 2014 a pulga estará na marca correspondente ao sexto número da sequência que se repete, isto é, na marca do número 9.*

9 Considere a sequência 2013, 2014, 2015, ... em que cada termo a_n, a partir do 4º termo, é calculado pela fórmula $a_n = a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1}$. Por exemplo, o 4º termo é $2013 + 2014 - 2015 = 2012$.
Determine o 2014º termo dessa sequência.

Resolução

Escrevendo-se alguns termos iniciais da sequência dada tem-se:
$2013, 2014, 2015, 2012, 2017, 2010, 2019, 2008, 2021, 2006, ...$
Observa-se que os termos de ordem ímpar formam a progressão aritmética de razão 2:
$2013, 2015, 2017, 2019, 2021, ...$
E os termos de ordem par formam a progressão aritmética de razão • 2:
$2014, 2012, 2010, 2008, 2006, ...$
Assim, como 2014 é par, o 2014º termo da sequência dada será o 1007º termo da progressão $2014, 2012, 2010, 2008, 2006, ...$*, isto é* $2014 + 1006 \times (-2) = 2$.

10 Na equação $x^3 - 2014x + m = 0$, onde m é real, uma das raízes é igual à soma das outras duas.

A Determine o valor de *m*.

B Resolva a equação.

A Sejam a, b e c as raízes com $a = b + c$. Como a soma das raízes é 0 (zero), tem-se que $a + b + c = 0 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$. Como a é uma das raízes segue-se que $0^3 - 2014 \times 0 + m = 0 \Rightarrow m = 0$.

B A equação é, portanto, $x^3 - 2014x = 0$. Assim, $x(x^2 - 2014) = 0 \Rightarrow x = 0\,(\mathrm{x = a})$ ou $x^2 = 2014 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2014}$.
Logo, as raízes da equação dada são 0, $\sqrt{2014}$ e $-\sqrt{2014}$.

Fim da Prova de Matemática Aplicada