**1**

**Um agricultor tinha uma quantidade $M$ de mudas de hortaliças para replantar em uma quantidade $C$ de canteiros. Pensou em plantar 8 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros, mas, dessa forma, sobrariam 32 mudas de hortaliças sem plantar. Tentou reorganizar o pensamento simulando o plantio de 12 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros. Desse modo, todas as hortaliças seriam plantadas, porém sobrariam 8 canteiros sem muda alguma plantada. Finalmente, organizou o plantio da seguinte forma: 10 mudas de hortaliças de cor verde-escuro por canteiro, ocupando metade da quantidade de canteiros, e 8 mudas de hortaliças de cor verde-claro por canteiro, ocupando a outra metade da quantidade de canteiros. Assim, todas as mudas de hortaliças seriam plantadas e nenhum canteiro ficaria vazio.**

**A partir das informações desse problema, determine a quantidade de mudas de hortaliças de cor verde-escuro e de cor verde-claro.**
**Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.**

## QUESTÃO 1 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

**Conteúdo programático:** Sistemas lineares. Resolução e discussão de um sistema linear.

**Resposta esperada:**

Sejam $C$ a quantidade de canteiros e $M$ a quantidade de mudas de hortaliças, então

$$\begin{cases} 8C + 32 = M \\ 12(C-8) = M \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} 8C = M - 32 \\ 12C = M + 12 \times 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8C + 32 &= 12C - 96 \\ 128 &= 4C \\ C &= \frac{128}{4} \\ C &= 32 \\ M = 8 \times 32 &+ 32 = 288 \end{aligned}$$

Portanto, existem 32 canteiros e 288 mudas de hortaliças.

Como são 32 canteiros, podemos distribuir:

- 16 canteiros com mudas de hortaliças verde-escuras que equivalem a 160 mudas (16 $\times$ 10 = 160)
- 16 canteiros com mudas de hortaliças verde-claras que equivalem a 128 mudas (16 $\times$ 8 = 128)

Totalizando 288 mudas de hortaliças.

**Resposta alternativa b):**

Por tentativa e erro.

| Quantidade de Canteiros | Quantidade de Mudas $8 \cdot C + 32$ | Quantidade de canteiros subtraído 8 e multiplicado por 12 é igual a $M$ |
|---|---|---|
| 1 | $8 \cdot 1 + 32 = 40$ | |
| 2 | $8 \cdot 2 + 32 = 48$ | |
| 3 | $8 \cdot 2 + 32 = 48$ | |
| 10 | $8 \cdot 10 + 32 = 112$ | $(10-8) \cdot 12 = 24$ |
| 15 | $8 \cdot 15 + 32 = 152$ | $(15-8) \cdot 12 = 84$ |
| 20 | $8 \cdot 20 + 32 = 192$ | $(20-8) \cdot 12 = 144$ |
| 30 | $8 \cdot 30 + 32 = 272$ | $(30-8) \cdot 12 = 264$ |
| 32 | $8 \cdot 32 + 32 = 288$ | $(32-8) \cdot 12 = 288$ |

**Resposta alternativa c):**

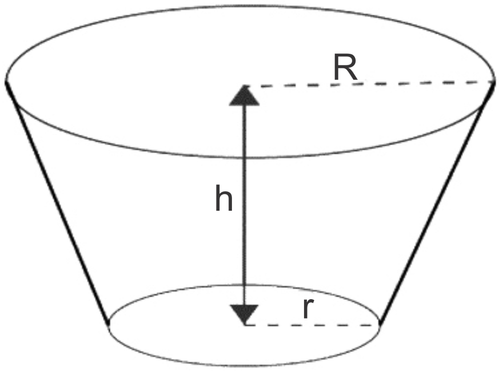
$$\begin{cases} 10 \cdot \dfrac{C}{2} + 8 \cdot \dfrac{C}{2} = M \\ 5C + 4C = M \\ 9C = M \qquad (i) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 8C = M - 32 \\ M = 8C + 32 \qquad (ii) \end{cases}$$

De $(i)$ e $(ii)$, tem-se

$$9C = 8C + 32$$
$$C = 32 \text{ e } M = 288$$

2

**Foram construídas cisternas em uma comunidade localizada no sertão nordestino, em pontos estratégicos, para que os moradores daquela localidade pudessem se abastecer de água, principalmente na época das secas. As cisternas foram construídas com formato de tronco de cone, com as seguintes medidas: o raio da base inferior mede 1 m, o raio da base superior mede 2 m e a altura mede 1,5 m, como mostra a figura a seguir.**




**Na época de secas, caminhões-pipas abastecem essas cisternas. Esse tipo de caminhão possui um tanque de armazenamento de água em formato cilíndrico, com 2 metros de diâmetro e 8 metros de comprimento.**

**Despreze as espessuras dos materiais dos quais são feitos as cisternas e o tanque do caminhão-pipa e suponha que as cisternas estejam completamente vazias de água e o tanque completamente cheio, considere ainda que não há desperdício algum de água.**

**Nessas condições, quantos tanques de caminhões-pipas completamente cheios de água são necessários para abastecer, no mínimo, 17 cisternas?**

**Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.**

**QUESTÃO 2 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** Geometria Plana. Figuras geométricas: circunferência e círculo. Áreas de círculos. Geometria Espacial. Sólidos: corpos redondos (cilindro, cone). Cálculo de áreas e volumes. Proporção.

**Resposta esperada:**

Sejam $V_c$ a capacidade de cada cisterna e $V_t$ a capacidade do tanque do caminhão-pipa.

- Como a cisterna tem formato de tronco de cone, seu volume pode ser calculado por meio da fórmula:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

em que $R$ é o raio da maior base circular, $r$ é o raio da menor base circular e $h$ é a altura do tronco de cone. Assim, cada cisterna tem volume:

$$V_c = \frac{\pi \cdot 1,5}{3} \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1)$$
$$V_c = \frac{1,5\pi}{3} \cdot 7$$
$$V_c = 3,5\pi \text{ m}^3$$

Realizando a conversão, cada m$^3$ comporta 1000 L (litros) de água, logo, a capacidade da cisterna é de 3500$\pi$ L de água ou, aproximadamente, 10990 L (considerando $\pi \approx 3,14$).

- Como o tanque do caminhão pipa tem formato cilíndrico, seu volume pode ser calculado por meio da fórmula:

$$V_t = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

em que $r$ é o raio da base e $h$ é a altura do cilindro. Assim, cada tanque do caminhão-pipa tem volume:

$$V_t = \pi \cdot 1^2 \cdot 8$$
$$V_t = 8\pi \text{ m}^3$$

Realizando a conversão, cada m$^3$ comporta 1000 L de água, logo, a capacidade do tanque do caminhão-pipa é de 8000$\pi$ L de água ou, aproximadamente, 25120 L (considerando $\pi \approx 3,14$).

- Realizando as comparações: cada caminhão-pipa é capaz de abastecer 2 cisternas, isto é,

$$\frac{V_t}{V_c} = \frac{8\pi\ m^3}{3,5\pi\ m^3} \approx 2,28 \qquad \text{OU} \qquad \frac{V_t}{V_c} = \frac{25120}{10990} \approx 2,28$$

  Assim, para abastecer 17 cisternas,

  1 cisterna – 3,5$\pi$ m$^3$
  17 cisternas – 59,5$\pi$ m$^3$

  e

  1 tanque de caminhão-pipa – 8$\pi$ m$^3$
  8 tanques de caminhão-pipa – 64$\pi$ m$^3$

  são necessários 8 tanques de caminhão-pipa.

**Resposta alternativa:**

Volume da cisterna

$$V_c = \frac{\pi \cdot 1,5}{3} \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1)$$
$$V_c = \frac{1,5 \cdot 3}{3} \cdot 7$$
$$V_c = 10,5 \text{ m}^3$$

Volume do tanque do caminhão-pipa

$$V_t = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V_t = 3 \cdot 1^2 \cdot 8$$
$$V_t = 24 \text{ m}^3$$

Considerando $\pi = 3$, temos que cada tanque abastece 2,28 cisternas. Assim, são necessários 8 tanques de caminhão-pipa para abastecer 17 cisternas.

**3**

**Em uma prova, por um erro de impressão, uma das questões apareceu da seguinte forma:**

> Determine a solução da equação
>
> $$\frac{\quad}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$$
>
> no conjunto dos números reais positivos.

**Sabe-se que o numerador apagado é um número inteiro positivo.**

**Considerando que o conjunto solução da equação contém números reais maiores ou iguais a 1, determine o numerador apagado.**

**Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.**

**QUESTÃO 3 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA**

**Conteúdo programático:** Polinômios e Equações Algébricas. Equações algébricas: definição, conceito de raiz, multiplicidade de raízes. Números naturais e números inteiros: operações e propriedades. Inequações.

**Resposta esperada:**

Seja $A$ o número inteiro positivo apagado. Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{A}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$$

que é equivalente à equação:

$$\frac{A \cdot x - (2x+1)}{(2x+1)x} = 0$$

A existência da equação depende que $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{1}{2}$. Além disso, a solução da equação é dada por:

$$\begin{aligned} A \cdot x - (2x+1) &= 0 \\ Ax - 2x - 1 &= 0 \\ x(A-2) - 1 &= 0 \\ x(A-2) &= 1 \\ x &= \frac{1}{A-2} \end{aligned}$$

Note que $A \neq 2$ e que o conjunto solução da equação contém números maiores ou iguais a 1, logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A-2} &\geq 1 \\ \frac{1}{A-2} - \frac{A-2}{A-2} &\geq 0 \\ \frac{1-A+2}{A-2} &\geq 0 \\ \frac{3-A}{A-2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Assim, $A \in (2,3]$. Como $A \neq 2$ e $A$ é inteiro, resta apenas $A = 3$.

Portanto, a solução da equação é $x = \frac{1}{A-2} = 1$, e o numerador apagado é o número 3.

**Resposta alternativa:** Seja $A$ o número inteiro positivo apagado. Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{A}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$$

que é equivalente à equação:

$$\frac{A}{2x+1} = \frac{1}{x}$$

A existência da equação depende que $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{1}{2}$. Além disso, a solução da equação é dada por:

$$A \cdot x = 2x + 1$$
$$Ax - 2x = 1$$
$$x(A-2) = 1$$
$$x = \frac{1}{A-2}$$

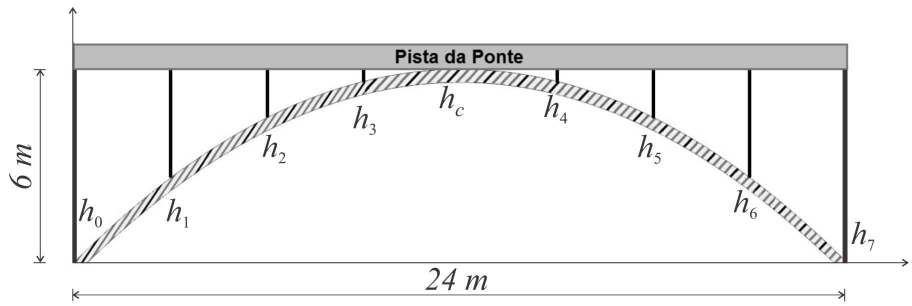
Note que $A \neq 2$ e que as soluções para $x$ devem ser maiores ou iguais a 1, logo podemos construir a tabela a seguir.

| $A$ | $x$ |
|---|---|
| 1 | $-1$ |
| 2 | – |
| 3 | 1 |
| 4 | $\frac{1}{2}$ |
| 5 | $\frac{1}{3}$ |

Como $A$ é inteiro e positivo, a única solução é $A = 3$, que é o numerador apagado e $x = 1$.

**4**

**Uma ponte, composta de pista, colunas e base de sustentação, será construída conforme a figura a seguir.**




**A pista da ponte é paralela ao solo e é apoiada por colunas de sustentação $h_0$, $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_c$, $h_4$, $h_5$, $h_6$ e $h_7$ perpendiculares à pista e que possuem duas extremidades: na pista e na base de sustentação, a qual possui formato parabólico, cujo lugar geométrico coincide com parte do gráfico de uma função polinomial de segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$, com $a \neq 0$.**

**Suponha que as colunas têm espaçamentos iguais entre elas, que o comprimento da coluna central $h_c$ é zero, que a pista da ponte tem 24 metros de comprimento e que sua altura é de 6 metros em relação ao solo.**

**Admitindo que as espessuras das colunas, da pista, do solo e da base de sustentação são desprezíveis, determine os comprimentos das colunas de sustentação $h_1$ e $h_5$.**

**Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.**

## QUESTÃO 4 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

**Conteúdo programático:** Relações e funções: domínio, contradomínio, imagem e gráficos, crescimento e decrescimento. Função quadrática. Coordenadas cartesianas na reta e no plano. Sistemas lineares.

**Resposta esperada:**

Primeiro vamos determinar a função quadrática cujo gráfico representa a base de sustentação da ponte.

Como $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$, podemos reescrever a função para o seguinte tipo:

$$f(x) = (a+b)x^2 + c$$

Escolhendo adequadamente um sistema de coordenadas façamos:

**Caso 1:**

$$f(-12) = 0, \qquad f(0) = 6, \qquad f(12) = 0$$

Assim, obtemos um sistema de equações:

$$\begin{cases} (a+b)(-12)^2 + c = 0 \\ (a+b)(0)^2 + c = 6 \\ (a+b)(12)^2 + c = 0 \end{cases} \quad \text{cuja solução é } (a+b) = -\frac{1}{24} \text{ e } c = 6$$

Então a função neste caso é dada por $f(x) = -\dfrac{1}{24}x^2 + 6$

Assim podemos obter:

$$h_1 = 6 - f(9) = 6 - \left(\left(-\frac{1}{24}\right)9^2 + 6\right) = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

$$h_5 = 6 - f(6) = 6 - \left(\left(-\frac{1}{24}\right)6^2 + 6\right) = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

Portanto, as colunas $h_1$ e $h_5$ medem respectivamente, 27/8 e 3/2 metros.

**Caso 2:**

$$f(-12) = -6, f(0) = 0 \text{ e } f(12) = -6$$

Assim obtemos um sistema de equações:

$$\begin{cases} (a+b)(-12)^2 + c = -6 \\ (a+b)(0)^2 + c = 0 \\ (a+b)(12)^2 + c = -6 \end{cases} \quad \text{cuja solução é } (a+b) = -\frac{1}{24} \text{ e } c = 0$$

Então a função neste caso é dada por $f(x) = -\frac{1}{24}x^2$

Assim podemos obter:

$$h_1 = |f(-9)| = \left|\left(-\frac{1}{24}\right)(-9)^2\right| = \left|-\frac{81}{24}\right| = \frac{27}{8}$$
$$h_5 = |f(6)| = \left|\left(-\frac{1}{24}\right)(6)^2\right| = \left|-\frac{36}{24}\right| = \frac{3}{2}$$

Portanto, as colunas $h_1$ e $h_5$ medem respectivamente, 27/8 e 3/2 metros.

Nota: Cabe salientar, que muitos outros sistemas de coordenadas podem ser adotados, como exemplificados nos casos 1 e 2, e desde que sejam escolhidos adequadamente, guardando as devidas razões entre o comprimento máximo da coluna de sustentação (6$m$) e o comprimento da pista da ponte (24$m$), as alturas das colunas de sustentação $h_1$ e $h_5$ serão sempre 27/8 e 3/2 metros.

**Resposta alternativa:**

Vamos aproximar os dados do problema para uma função quadrática convencional do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Considerando que uma das raízes é a própria origem do plano cartesiano, vamos adotar $x' = 0$ e $x'' = 24$ sabendo que a função atinge seu valor máximo em $x = 12$.
Desta forma, temos

$$f(0) = 0, \qquad f(24) = 0, \qquad f(12) = 6$$

Note que, da primeira igualdade $f(0) = 0$, obtemos $c = 0$. Substituindo as outras duas igualdades em $f$, geramos o sistema

$$\begin{cases} a \cdot 24^2 + b \cdot 24 = 0 \\ a \cdot 12^2 + b \cdot 12 = 6 \end{cases}$$

que equivale ao sistema

$$\begin{cases} 24a + b = 0 \\ 24a + 2b = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $b = -24a$. Substituindo na segunda equação, obtemos:

$$24a + 2(-24a) = 1 \Rightarrow 24a + -48a = 1 \Rightarrow -24a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{24}$$

e também

$$b = -24a = -24\left(-\frac{1}{24}\right) = 1$$

Então a função $f$ é dada por $f(x) = -\dfrac{1}{24}x^2 + x$

Vamos calcular $h_1$ e $h_2$, que é simétrica à $h_5$.

Como $f(3) = -\dfrac{1}{24} \cdot 3^2 + 3 = \dfrac{21}{8}$, segue que $h_1 = 6 - f(3) = 6 - \dfrac{21}{8} = \dfrac{27}{8}$.

Como $f(6) = -\dfrac{1}{24} \cdot 6^2 + 6 = \dfrac{9}{2}$, segue que $h_2 = h_5 = 6 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{3}{2}$, ou seja,

$h_1 = \dfrac{27}{8}$ metros e $h_2 = h_5 = \dfrac{3}{2}$ metros.