Digite a equação aqui.

associação nacional de
centros de pós graduação
em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2022

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 01/10/2021 – SEXTA-FEIRA
HORÁRIO: 8h00m às 10h00m (horário de Brasília)

Digite a equação aqui.

anpec associação nacional de centros de pós graduação em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2022
PROVA DE MATEMÁTICA
2º Dia: 01/10 – SEXTA-FEIRA (Manhã)
HORÁRIO: 8h00m às 10h00m

INSTRUÇÕES

1. Esta **PROVA** é constituída de **quinze** questões objetivas.
2. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que *n* é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
3. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outras pessoas.
4. A duração da prova é de **duas horas**.
5. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora, qualquer material de consulta ou equipamentos eletrônicos além do utilizado para realização das provas.
6. Durante a realização das provas somente será permitida a saída do candidato após a autorização, por meio do *chat online*, do fiscal de prova.
7. O candidato só poderá desconectar-se, após o término da prova de cada disciplina.
8. Se a conexão cair, o candidato deve reiniciar a máquina. Caso a conexão não volte após o reinício da máquina, o candidato deve rotear a internet/wi-Fi de alguma pessoa próxima ou entrar em contato com o suporte técnico, cujo contato está no Comprovante de Inscrição.
9. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a). A desobediência ao fiscal de prova também poderá implicar a anulação da prova do(a) candidato(a).

AGENDA

- 07/10/2021 – 14 horas – Divulgação dos gabaritos das provas objetivas, no endereço: http://www.anpec.org.br.
- 07/10 a 08/10/2021 – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 14h do dia 08/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- 05/11/2021 – 14 horas – Divulgação do resultado na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
-
- Nas questões de **1** a **15** (não numéricas), marque, de acordo com o comando de cada uma delas: itens **VERDADEIROS**, marque **V**; itens **FALSOS**, marque **F**; ou deixe a resposta **EM BRANCO (SEM MARCAR)**.
- Caso a **resposta seja numérica**, digite entre os números de 00 até 99 o número correspondente à resposta ou deixe a resposta **EM BRANCO (SEM MARCAR)**.

QUESTÃO 01

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Dado um subconjunto finito $A \subseteq \mathbb{R}$, denote por $card(A)$ a sua cardinalidade (ou seja, o número de elementos em A). Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⓪ Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $B \subseteq A$, então $card(B) \leq card(A)$.

① Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $card(B) \leq card(A)$, então $B \subseteq A$.

② Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $B \subseteq A$. Tomando

$C = A \backslash B = \{a \in \mathbb{R} : a \in A\ e\ a \notin B\}$ e sendo $P(C)$ o conjunto das partes de C, então vale a igualdade $card(P(C)) = \frac{2^{card(A)}}{2^{card(B)}}$.

③ Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $f: A \to B$,

se $card(A) > card(B)$, então f não é injetora.

④ Dados dois subconjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $card(A) < card(B)$, é possível encontrar uma função sobrejetora $f: A \to B$.

QUESTÃO 02

Seja V um espaço vetorial sobre os números reais. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⓪ Se $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ é um conjunto linearmente independente, então o conjunto

$\{v_1 - v_3, v_2 - v_3, v_3\}$ também é linearmente independente.

① Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, então o conjunto

$\{w_1 - w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ também é um subespaço vetorial de V.

② Para o caso em que $V = \mathbb{R}^3$, e A e B são duas matrizes reais 3×3, suponha que W_1 é o núcleo de A e W_2 é o núcleo de B. Portanto, W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, e o conjunto $\{w_1 + w_2 \in \mathbb{R}^3 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ é o núcleo da matriz $A + B$.

③ Para o caso em que $V = \mathbb{R}^2$, qualquer elemento do conjunto $\{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 1\}$ pode ser expresso como a soma de $(1,1)$ com algum elemento do conjunto

$\{(x_1, x_2) \in V : x_1 - x_2 = 0\}$.

④ Para o caso em que V é o conjunto das matrizes reais 2×2, em que a soma entre matrizes e a multiplicação por escalares são feitas da forma padrão entrada a entrada, o subconjunto das matrizes reais do tipo $\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ com $ad = 0$ não forma um subespaço vetorial de V.

QUESTÃO 03

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⓪ Para todo número natural $n \geq 1$, vale que $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$, em que $\ln(\mathrm{a})$ representa o logaritmo natural de $\mathrm{a} > 0$.

① Para todo número real $x \in \mathbb{R}$, vale que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

② Dados dois números reais $x, y \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade $|x-y| \geq 1$ se, e somente se, $x \geq y+1$.

③ O conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x}{e^x} > e^{-1}\right\}$ satisfaz $A = \emptyset$, em que $e = 2{,}718281\ldots$ é o número irracional neperiano.

④ Para todo número real $x > 0$ tal que $x \neq 1$, vale a desigualdade $\ln(x) < x - 1$, permitindo concluir que $\pi^e < e^\pi$, em que $\pi = 3{,}14159\ldots$ é o número irracional *pi*.

QUESTÃO 04

Considere as funções $\boldsymbol{f, g, h}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $\boldsymbol{f(x) = (\max\{x, 0\})^2}$, $\boldsymbol{g(x) = -(\min\{x, 0\})^2}$, e $\boldsymbol{h(x) = [f(x-1) + g(x-1)]^3}$. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ $f(x) + g(-x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

① A função h é uma bijeção.

② A função f é contínua em $x = 0$.

③ A função g não é derivável em $x = 0$.

④ A função h possui um ponto de inflexão em $x = -1$.

QUESTÃO 05

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⓪ As soluções da equação diferencial $y = 2y'$ são dadas por funções da forma

$y(x) = ce^{2x}$, em que c é uma constante.

① Uma função $y: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial $y' = y/x - 1$ se, e somente se, $y(x) = x(c - \ln(x))$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

② Uma função $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial $xy' - y = 0$ se, e somente se, y for uma função linear (ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $y(x) = kx$, para todo $x \in \mathbb{R}$).

③ Uma função $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da equação diferencial $y'' = \alpha y' + \beta$, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$ se, e somente se, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $y(x) = -\frac{\beta}{\alpha}x + c$.

④ Dada uma função real $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que possui derivadas de todas as ordens, denote por $y^{(n)}(x)$ a sua derivada de ordem $n \geq 3$. Fixado $n \geq 3$, o conjunto de todas as soluções $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a equação diferencial $y^{(n)} = 0$ é dado pelo conjunto de todos os polinômios $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n.

QUESTÃO 06

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Julgue as afirmações abaixo de acordo com a sua veracidade:

⓪ Se todo elemento do intervalo $[0,1]$ é ponto de máximo local da função f, então $\int_0^1 f''(x)dx < 0$.

① Se $f'(x^*) = -1$ e $f''(x^*) < 0$, então x^* é ponto de máximo local da função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) + x$.

② Se para todo natural $n \geq 1$ vale que $f(c) \geq f(x) - \frac{1}{n}$ para todo x, então $f'(c) = 0$.

③ Se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = f(e^x)$, então $g'(x) = f'(x)e^x$.

④ Se $0 \leq f(x) \leq 1$, então $0 \leq f''(x) \leq 1$.

QUESTÃO 07

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências de números reais. Se a sequência (z_n) é convergente e $z_n = \frac{x_n + y_n}{2}$ para todo $n \geq 1$, então (x_n) e (y_n) são convergentes.

① $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$.

② A sequência de números reais (x_n) cujo termo geral satisfaz $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, para todo $n \geq 1$, não converge.

③ $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{3n} = 0$.

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{2022^n}{n^{2022}} = +\infty$.

QUESTÃO 08

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ Se (x_n) é uma sequência com $x_n > 0$ para todo $n \geq 1$, e $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n}$ converge.

① Se $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ e $y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ são séries convergentes e, portanto, são também convergentes $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$.

② Para qualquer número real a satisfazendo $2 < a < 3$, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(3 - a)^n$ converge.

③ A série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^n}$ é absolutamente convergente.

④ A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ converge.

QUESTÃO 09

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⓪ A taxa bimestral de juros simples que faz com que um capital quadruplique de valor após 2 anos é igual a 25% ao bimestre.

① Considerando o regime de juros simples, a taxa de $3{,}6\%$ ao ano é equivalente à taxa de $1{,}2\%$ ao trimestre.

② Considerando o regime de juros compostos, a taxa de 5% ao semestre é equivalente à taxa de $10{,}25\%$ ao ano.

③ Se uma aplicação de $R\$\ 120.000{,}00$, realizada em certa data à taxa de juros composta de $2{,}4\%$ ao mês, produz um montante de $R\$\ 145.071{,}24$ em uma data futura, então o prazo $n \geq 1$ (em meses) pode ser determinado como solução da equação:

$$(1{,}024)^n = 1{,}208927.$$

④ Um bem no valor de $R\$\ 500.000{,}00$ é vendido nas seguintes condições: (i) entrada de $R\$\ 150.000{,}00$; (ii) três parcelas mensais, iguais e sucessivas de $R\$\ 100.000{,}00$ nos meses seguintes; (iii) uma última parcela ao final do sexto mês também no valor de $R\$\ 100.000{,}00$. Logo, a taxa de juros embutida no financiamento do bem, denotada por i (i.e., a taxa interna de retorno do fluxo de caixa), é solução da equação:

$$3{,}5 = \sum_{t=1}^{3} \frac{1}{(1+i)^t} + \frac{1}{(1+i)^6}.$$

QUESTÃO 10

Considere a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + (1+x)^3 y^2}$ para todo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2$. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⓪ A função $\frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é homogênea de grau 4.

① A função f tem mais do que um ponto crítico.

② Existe um ponto de mínimo local para f.

③ Existe um ponto de máximo local para f.

④ A função f assume um valor mínimo em seu domínio.

QUESTÃO 11

Dada uma lista de parâmetros $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^2$, são definidas duas funções $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $\boldsymbol{f(x_1, x_2) = x_1 + \alpha x_2}$ e $\boldsymbol{g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + \beta\left(x_2^2 - 1\right)}$. Considere o problema de otimização que consiste em maximizar $\boldsymbol{f(x_1, x_2)}$ sujeito a $\boldsymbol{g(x_1, x_2) = 0}$. Defina o lagrangeano $\boldsymbol{\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2)}$. O gradiente de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ é notado por $\boldsymbol{\nabla\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}$. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ Quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ o problema não tem solução.

① Quando $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ o problema não tem solução.

② Quando $\alpha = \beta = 1$ o problema tem uma única solução, que pode ser encontrada resolvendo-se $\nabla\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = (0,0,0)$.

③ Quando $\alpha = \beta = 0$ uma solução do problema pode ser encontrada resolvendo-se

$\nabla\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = (0,0,0)$.

④ Quando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ o ponto $(1,0)$ resolve o problema.

QUESTÃO 12

Dado um parâmetro $a \in \mathbb{R}$, considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = -x^2 - xy - 2y^2 + 2ax + 2ay$ e o problema de maximização:

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y).$$

Denotando por $(x^*, y^*) = (x^*(a), y^*(a))$ a solução deste problema, seja $f^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^*(a) = f(x^*, y^*)$ a função valor correspondente. Calcule a derivada de f^* no ponto $a = 14$, ou seja, o valor de $\frac{df^*}{da}(14)$.

QUESTÃO 13

Julgue a veracidade das seguintes afirmativas:

⓪ Seja $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ não é um ponto crítico da função f. Se $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix}$ e A^T denota a transposta de A, então a matriz AA^T tem posto 1.

① A equação $(x-2)^3 + x(y-1)^2 - \ln y = 1$ define implicitamente y como função de x em uma vizinhança do ponto $(3,1) \in \mathbb{R}^2$, e denotamos para expressar isso $y = h(x)$. Esta função satisfaz $\frac{dh}{dx}(3) = \frac{1}{2}$.

② Considerando a função $f: \mathbb{R} \times [0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^2 + y^2)(ye^{|x|} - 1)$, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único $y = h(x) \in [0,1)$ tal que $f\big(x, h(x)\big) = 0$, o que define uma função contínua $h: \mathbb{R} \to [0,1)$.

③ Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \cos(x_1 x_2)$. Denotamos por $\langle z, w \rangle$ o produto interno padrão entre os vetores z e w no $\mathbb{R}^2$, e por $\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$ os gradientes das duas funções. Então $\langle \nabla f(x) - \nabla g(x), \nabla f(x) - \nabla g(x) \rangle \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, cuja distância euclidiana ao ponto $(0,0)$ é 1.

④ A Matriz Hessiana associada à função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_1 x_2 - 4x_2^2$ é semidefinida positiva em qualquer ponto do domínio, e logo a função f é convexa.

QUESTÃO 14

Considere o sistema de equações em diferenças dado por

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= -4x_t + 5y_t, \\ y_{t+1} &= -2x_t + 3y_t, \end{aligned}$$

sendo $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Sabe-se que $x_0 = 4$ e $y_0 = 1$. Encontre $4L$, em que $L = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{1+y_t}$.

QUESTÃO 15

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável tal que

$f'(x) - f(x) = e^{2x}$ e $f(0) = 1$. Encontre o valor de $\left|\int_0^{\ln(5)} f(x)dx\right|$.